

TP 1 IMN359 - Rappels mathématiques

(Nombres complexes, algèbre linéaire, produit Hermitien)

Maxime Descoteaux

4 septembre 2024

Ce TP 1 est à me remettre par courriel **le 15 septembre** dans un seul fichier zip bien organisé. Vous devez rédiger un rapport avec les solutions en *Latex* et me remettre un zip avec votre code Python. Commentez le code et assurez-vous que je puisse reproduire vos résultats. **Ne PAS utilisez la toolbox symbolique de Python, i.e. pas besoin de coder le calcul des dérivées. Vous le faites à la main et vous implémentez.** Séparez votre code en différents fichiers pour faciliter la lecture. Des points seront attribués pour la qualité du document latex (5 points) et la qualité du code Python (5 points). Le TP vaut 40 points au total. Si vous faites des questions à plus qu'une équipe, dites-le sur le rapport.

1. Racines carrés et forme d'Euler [5 points]

- (a) Trouvez les racines de $x^2 + 2x + 5$.
- (b) Ecrivez vos racines sous la forme d'Euler.

2. Séries de Taylor [10 points]

- (a) Trouvez la série de Taylor de $\frac{1}{1-x}$, autour de $a = 0$. Décrivez vos étapes.
- (b) Ecrivez une fonction Python qui implémente cette série. Testez votre fonction pour 3 différentes valeurs de x avec l'ordre de votre choix.
- (c) En python, faites une courbe qui illustre l'erreur de la série en fonction de l'ordre auquel la série est tronquée pour la fonction évaluée à $x = 0.5$.
- (d) A l'aide des séries de Taylor, démontrez que

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

3. **Systèmes d'équations.** [10 points] Soit le système suivant :

$$\begin{array}{rccccr} 2x & - & y & & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & z & = & -1 \\ & & - & 3y & + & 4z & = & 4 \end{array}$$

- (a) Dessinez une représentation géométrique de ce système. Vous pouvez prendre le logiciel que vous voulez. Suggestion : je vous suggère de regarder matplotlib et les fonctions suivantes en ligne.

```
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
```

- (b) Trouvez la solution (x, y, z) avec la méthode classique de substitution.
(c) Ecrivez le système sous forme matricielle $Ax = B$.
(d) Vérifiez votre solution en Python.

4. **Bases orthogonales et orthonormales.** [5 points]

- (a) $\vec{z}^1 = (1 - i, 1)$ et $\vec{z}^2 = (i, 1 - i) \in \mathcal{C}^2$ (nombres complexes dans le plan 2D). Montrez que \vec{z}^1 et \vec{z}^2 sont orthogonaux.
(b) Est-ce qu'ils sont orthonormés ? Pourquoi ?
(c) Donnez une base orthonormale qui définit l'espace \mathcal{C}^2 .