IV. Transformée de Fourier discrète.

La transformée de Fourier discrète (TFD) est l'équivalent de la transformée de Fourier d'une fonction g(t), mais avec g(t) échantillonnée à des intervalles réguliers pour un nombre N déterminé de valeurs. g(t) peut être une distribution ou un vecteur de valeurs expérimentales.

Puisque la fonction g(t) est échantillonnée à N valeurs, elle peut s'écrire g(n) ou g_n, avec $0 \leq n \leq N-1$.

La transformée de Fourier discrète inverse est G(k) ou G_k, avec $0 \leq k \leq N-1$.

(Certains auteurs utilisent les paires de variables (n,k), (u,v), (x,k) etc... qui ne réfèrent pas à la fréquence, il est suggéré de garder les variables t ou x versus f tout en leur supposant des valeurs discrètes à intervalles réguliers.)

Transformée de Fourier discrète (TFD):

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) \exp(-i2\pi kn / N)$$

Transformée de Fourier discrète inverse (TFDI):

$$g(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G(k) \exp(i2\pi kn / N)$$

Analogie entre la série de Fourier exponentielle et à la transformée de Fourier:

Série de Fourier exponentielle:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega nt} \qquad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega nt} dt$$

Transformée de Fourier:

$$g(t) = TF^{-1}(G(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi f t} df \qquad G(f) = TF(g(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

Différentes forme de représentation de G(k):

$$G(k) = r(k)\left[\cos(\theta(k)) + i\sin(\theta(k))\right] = r(k)\exp(i\theta(k))$$

$$G(k) = |G(k)|\exp(i\theta(k))$$

$$G(k) = A(k) + iB(k)$$

Spectre d'amplitude:

$$|G(k)| = \sqrt{A(k)^2 + B(k)^2}$$

Spectre de phase:

$$\theta(k) = arctg\left(\frac{B(k)}{A(k)}\right)$$

Parité:

$$G(k) = A(k) + iB(k)$$

Si g(n) paire $\Rightarrow$ TFD[g(n)] = A(k) c'est à dire partie réelle.

Si g(n) impaire $\Rightarrow$ TFD[g(n)] = iB(k) c'est à dire partie imaginaire.

Si g(n) paire $\Rightarrow$ TFD[g(n)] = G(k) est réelle et paire.

Si g(n) impaire $\Rightarrow$ TFD[g(n)] = G(k) est imaginaire et impaire.

Exemple 1:

Calculer G(k) = TFD[g(n)] avec $g(n) = \begin{cases} n & pour\, 0 \le n \le 3 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n)\exp(-i2\pi kn/N) \quad \text{et} \quad g(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} G(k)\exp(i2\pi kn/N)$$

g(n) = [0 1 2 3].

G(0) = 0exp(-i2π.0.0/4) + 1exp(-i2π.0.1/4) + 2exp(-i2π.0.2/4) + 3exp(-i2π.0.3/4)

G(1) = 0exp(-i2π.1.0/4) + 1exp(-i2π.1.1/4) + 2exp(-i2π.1.2/4) + 3exp(-i2π.1.3/4)

G(2) = 0exp(-i2π.2.0/4) + 1exp(-i2π.2.1/4) + 2exp(-i2π.2.2/4) + 3exp(-i2π.2.3/4)

G(3) = 0exp(-i2π.3.0/4) + 1exp(-i2π.3.1/4) + 2exp(-i2π.3.2/4) + 3exp(-i2π.3.3/4)

G(0) = 0 + 1 + 2 + 3 = 6

G(1) = 0 - i - 2 + 3i = -2 + 2i

G(2) = 0 - 1 + 2 - 3 = -2

G(3) = 0 + i - 2 - 3i = -2 - 2i

Alternativement: utiliser la forme de l'exponentielle $e^{ab} = \left(e^{a}\right)^{b}$ pour le calcul de

$e^{-i2\pi kn/N} = \left(e^{-i2\pi k/N}\right)^{n} = E(k)^{n}$ pour chacune des valeurs de k:

k = 0: E(0) = exp(-i2π.0/4) = cos(0) - isin(0) = 1

k = 1: E(1) = exp(-i2π.1/4) = cos(π/2) - isin(π/2) = -i

k = 2: E(2) = exp(-i2π.2/4) = cos(π) - isin(π) = -1

k = 3: E(3) = exp(-i2π.3/4) = cos(3π/2) - isin(3π/2) = i

Calculer $G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n)\exp(-i2\pi kn/N) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n)\left[E(k)\right]^{n}$

k = 0: $G(0) = 0[E(0)]^0 + 1[E(0)]^1 + 2[E(0)]^2 + 3[E(0)]^3$

$G(0) = 0[1]^0 + 1[1]^1 + 2[1]^2 + 3[1]^3 = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$

k = 1: $G(1) = 0[E(1)]^0 + 1[E(1)]^1 + 2[E(1)]^2 + 3[E(1)]^3$

$G(1) = 0[-i]^0 + 1[-i]^1 + 2[-i]^2 + 3[-i]^3 = 0 - i - 2 + 3i = -2 + 2i$

k = 2: $G(2) = 0[E(2)]^0 + 1[E(2)]^1 + 2[E(2)]^2 + 3[E(2)]^3$

$G(2) = 0[-1]^0 + 1[-1]^1 + 2[-1]^2 + 3[-1]^3 = 0 - 1 + 2 - 3 = -2$

k = 3: $G(3) = 0[E(3)]^0 + 1[E(3)]^1 + 2[E(3)]^2 + 3[E(3)]^3$

$G(3) = 0[i]^0 + 1[i]^1 + 2[i]^2 + 3[i]^3 = 0 + i - 2 - 3i = -2 - 2i$

Réécrire G(k) avec k = 0 à 3 sous forme matricielle:

$$[G(0) \quad \mathrm{G}(1) \quad \mathrm{G}(2) \quad \mathrm{G}(3)] = \begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(0)^0 & \mathrm{E}(1)^0 & \mathrm{E}(2)^0 & \mathrm{E}(3)^0 \\ E(0)^1 & \mathrm{E}(1)^1 & \mathrm{E}(2)^1 & \mathrm{E}(3)^1 \\ E(0)^2 & \mathrm{E}(1)^2 & \mathrm{E}(2)^2 & \mathrm{E}(3)^2 \\ E(0)^3 & \mathrm{E}(1)^3 & \mathrm{E}(2)^3 & \mathrm{E}(3)^3 \end{bmatrix}$$

$$[G(0) \quad G(1) \quad G(2) \quad G(3)] = \begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^0 & (-i)^0 & (-1)^0 & i^0 \\ 1^1 & (-i)^1 & (-1)^1 & i^1 \\ 1^2 & (-i)^2 & (-1)^2 & i^2 \\ 1^3 & (-i)^3 & (-1)^3 & i^3 \end{bmatrix}$$

ou bien

$$\begin{bmatrix} G(0) \\ G(1) \\ G(2) \\ G(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^0 & 1^1 & 1^2 & 1^3 \\ (-i)^0 & (-i)^1 & (-i)^2 & (-i)^3 \\ (-1)^0 & (-1)^1 & (-1)^2 & (-1)^3 \\ i^0 & i^1 & i^2 & i^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Calcul de la transformée de Fourier discrète inverse

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n)\exp(-i2\pi kn/N) \quad \text{et} \quad g(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} G(k)\exp(i2\pi kn/N)$$

Les exponentielles ont les mêmes valeurs, sauf le signe ⇒ les valeurs imaginaires de E(k) ont un signe inversé.

Aussi, pour la TFDI, ce sont E(n) au lieu de E(k):

E(0) = 1 E(1) = i E(2) = -1 E(3) = -i

$$[g(0) \quad g(1) \quad g(2) \quad g(3)] = [6 \quad -2+2i \quad -2 \quad -2-2i] \begin{bmatrix} (1)^0 & (i)^0 & (-1)^0 & (-i)^0 \\ (1)^1 & (i)^1 & (-1)^1 & (-i)^1 \\ (1)^2 & (i)^2 & (-1)^2 & (-i)^2 \\ (1)^3 & (i)^3 & (-1)^3 & (-i)^3 \end{bmatrix} /4$$

$$[g(0) \quad g(1) \quad g(2) \quad g(3)] = [6 \quad -2+2i \quad -2 \quad -2-2i] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} /4$$ ou bien:

$$\begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2+2i \\ -2 \\ -2-2i \end{bmatrix} /4$$

g(0) = (6 - 2 + 2i - 2 - 2 - 2i)/4 = 0

g(1) = (6 - 2i - 2 + 2 + 2i - 2)/4 = 1

g(2) = (6 + 2 - 2i -2 + 2 + 2i)/4 = 2

g(3) = (6 + 2i + 2 + 2 - 2i + 2)/4 = 3

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n)\exp(-i2\pi kn/N) \quad \text{et} \quad g(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} G(k)\exp(i2\pi kn/N)$$

Exemple 2:

1. $g_1(n) = [1\ 1\ 1\ 1]$
2. $g_2(n) = [1\ 0\ 0\ 0]$
3. $g_3(n) = [1\ -1\ 1\ -1]$
4. $g_4(n) = [1\ i\ 1\ i]$

a) Représenter graphiquement les fonctions $g_i(n)$.

Réponses: $G_1(k) = [4\ 0\ 0\ 0]$; $G_2(k) = [1\ 1\ 1\ 1]$;

$G_3(k) = [0\ 0\ 4\ 0]$; $G_4(k) = [2+2i\ 0\ 2-2i\ 0]$;

b) Calculer les TFD $G_i(k) = \mathrm{TFD}[g_i(n)]$ des fonctions.

c) Calculer les TFDI $g_i(n) = \mathrm{TFDI}[G_i(k)]$ des fonctions.