Propriétés de la transformée de Fourier (TF)

Les propriétés de la TF sont résumées dans la Table. Ici, nous voyons quelques démonstrations.

Autres notations dans les transformées de Fourier:

En posant $\omega=2\pi f$:

$$TF[g(t)] = G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft}dt \quad \rightarrow \quad G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt$$

$\omega=2\pi f$, $d\omega=2\pi df$ ➔ $df=d\omega/2\pi$:

$$g(t) = TF^{-1}(G(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{i2\pi ft}df \rightarrow g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega t}d\omega/2\pi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Linéarité:

$a_1g_1(t) + a_2g_2(t) \leftrightarrow a_1G_1(f) + a_2G_2(f)$

$$TF[a_1g_1(t) + a_2g_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [a_1g_1(t) + a_2g_2(t)]e^{-i2\pi ft}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} a_1g_1(t)e^{-i2\pi ft}dt + \int_{-\infty}^{\infty} a_2g_2(t)e^{-i2\pi ft}dt = a_1G_1(f) + a_2G_2(f)$$

Symétrie:

$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{i2\pi ft}df$. Changer $t \leftrightarrow -t \Rightarrow$ $g(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{-i2\pi ft}df$

En interchangeant t et f: $g(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t)e^{-i2\pi ft}dt = TF(G(t))$

Échelle du temps (*time scaling*):

$$g(at) = \frac{1}{|a|}G\left(\frac{f}{a}\right),$$ avec $a \in R^*$.

$TF[g(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(at)e^{-i2\pi ft}dt$ $\qquad x = at \Rightarrow dx = adt \Rightarrow dt = dx/a$

Si a > 0: $FT[g(at)] = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i2\pi fx/a}dx = \frac{1}{a}G(f/a)$

C'est l'argument de l'exponentiel qui donne l'argument de G.

Si a < 0: $FT[g(at)] = \frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty} g(x)e^{-i2\pi fx/a}dx = \frac{1}{-a}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i2\pi fx/a}dx = \frac{1}{|a|}G(f/a)$

$$FT[g(at)] = \frac{1}{|a|}G(f/a)$$

Décalage temporel d'un scalaire réel a = t₀:

$$\mathrm{TF}[g(t-t_0)] = e^{-i\omega t_0}G(w).$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\mathrm{TF}[g(t-t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t-t_0)e^{-i\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-i\omega(u+t_0)}du, \qquad \text{avec le changement de variable} \quad u = t-t_0, du = dt \\
&= e^{-i\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-i\omega u}du \\
&= e^{-i\omega t_0}G(w)
\end{aligned}$$

Décalage fréquentiel d'une fréquence b=w₀:

$$\mathrm{TF}^{-1}[G(\omega-\omega_0)] = e^{it\omega_0}g(t) \text{ et donc, } \mathrm{TF}[e^{it\omega_0}g(t)] = G(\omega-\omega_0).$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\mathrm{TF}[e^{it\omega_0}g(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega_0}g(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-it(\omega-\omega_0)}dt \\
&= G(\omega-\omega_0)
\end{aligned}$$

Parité:

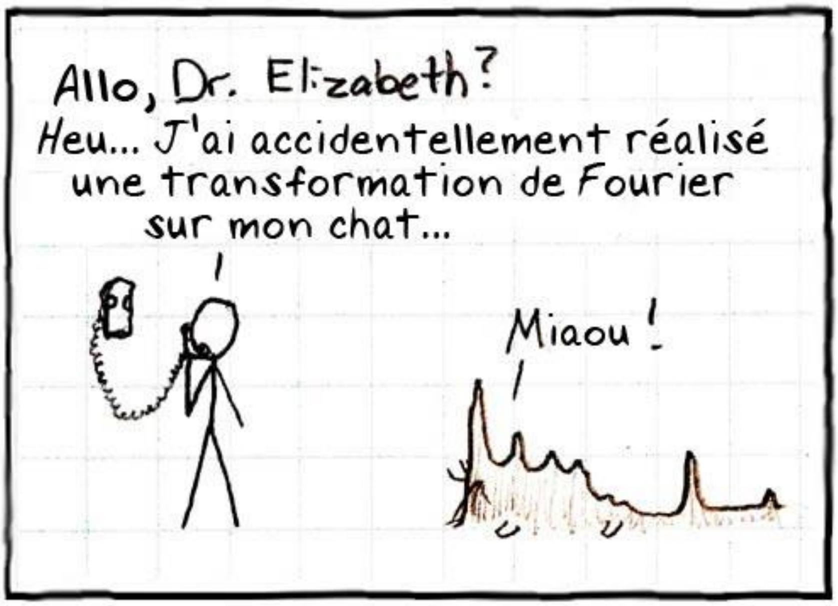
G(ω) est la transformée de Fourier de g(t)

Si g(t) est réelle et paire ⇒ G(ω) est réelle et paire

Si g(t) est réelle et impaire ⇒ G(ω) est imaginaire et impaire

Si G(ω) est réelle et positive ⇒ elle fait un angle 0 avec l'axe des réels ⇒ la phase vaut zéro (φ(ω) = 0).

Si G(ω) est réelle et négative ⇒ elle fait un angle de ± π avec l'axe des réels ⇒ la phase vaut ± π (φ(ω) = ± π).



Propriété	$g(t)$	$G(w)$
Linéarité	$a \cdot g(t) + b \cdot h(t)$	$a \cdot G(\omega) + b \cdot H(\omega)$
Symétrie	$G(t)$	$2\pi g(-\omega)$
Échelle du temps (*time scaling*)	$g(at)$	$\frac{1}{\|a\|} G\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Décalage temporel (*time shifting*)	$g(t-a)$	$e^{-i\omega a}G(w)$
Décalage fréquentiel (*frequency shifting*)	$e^{itb}g(t)$	$G(w-b)$

TABLE 1 – Table des propriétés de la transformée de Fourier (TF) de la fonction $g(t)$. La TF$[g(t)]$= $G(\omega)$ peut s'exprimer en fréquences f ou en fréquences angulaires $\omega = 2\pi f$. Dans la table, a et b répresentent des scalaires réels et TF$[h(t)]$= $H(\omega)$.

La fonction de Dirac δ

La fonction de Dirac δ peut être définie comme la dérivée de la fonction de Heaviside qui est définie comme:

$$H(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & si\, t < 0 \\ 1/2 & si\ t = 0 \\ 1 & si\ t > 0 \end{cases}$$

et δ(x) et le δ de Kronecker (la version discrète et numérique du Dirac) sont définies comme:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & si\, x = 0 \\ 0 & si\, x \neq 0 \end{cases} \qquad \left(\delta \text{ de Kronecker } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \right)$$

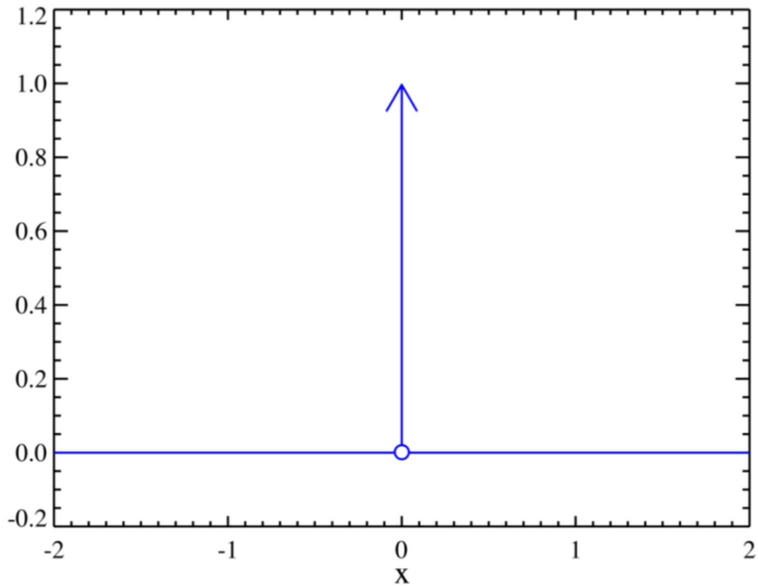


Figure. Fonction de Dirac δ.

Les propriétés de δ(x):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) dx = f(a)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

Le peigne de Dirac ou train d'impulsions (sera utile après l'intra):

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

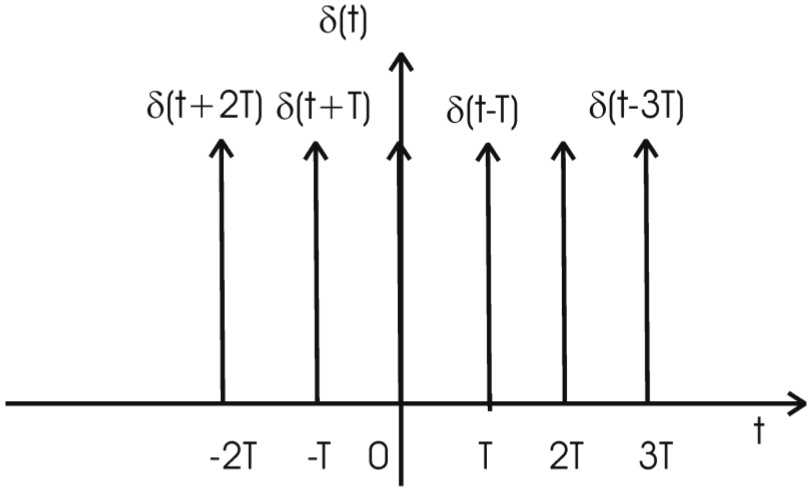


Figure. Peigne de Dirac ou train d'impulsions.

Transformées de Fourier généralisées (Optionnel – pas dans les TPs ni examens)

Certaines fonctions ne sont pas de carrés intégrables:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \infty$$

c'est le cas des fonctions périodiques comme le sinus et le cosinus, la fonction de Heaviside, une constante etc....

Fonction de Heaviside: $H(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & si\, t < 0 \\ 1/2 & si\ t = 0 \\ 1 & si\ t > 0 \end{cases}$

Par définition, une fonction généralisée à progrès lent g(t) est une fonction associée à une fonction symbolique ϕ(t) qui décroît rapidement:

$$\langle g(t), \phi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi(t)dt$$

Pour calculer les transformées de Fourier de fonctions généralisées, on utilise la formule de Parseval.

La formule de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)g(x)dx$$

Celle-ci peut être démontrée de la façon suivante, en utilisant les transformées de Fourier:

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx$$

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-ixy}dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-ixy}dy\right]dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx\right]dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)F(y)dy$$

et en changeant la variable y en x:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)F(x)dx$$

Cette équation peut se rapporter aux transformées de Fourier comme suit, en intégrant sur ω:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)TF[g(t)]d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} TF[f(t)]g(\omega)d\omega$$

ou bien, en intégrant sur t:

$$\int_{-\infty}^{\infty} TF^{-1}[F(\omega)]G(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)TF^{-1}[G(\omega)]dt$$

Dans les deux cas, nous avons conservé la même variable ω ou t pour f et F et pour g et G.

Exemple 1:

Trouver la TF d'une constante, soit g(t) = 1.

g(t) = 1 est à progrès lent.

En utilisant la formule de Parseval avec la fonction rapidement décroissante $\phi(t)$:

Soit la formule de Parseval: $\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\phi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\Phi(x)dx$

qui devient:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\Phi(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)e^{-i\omega t}dt\right]_{\omega=0}$$

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)e^{-i\omega t}dt\right]_{\omega=0} = TF[\Phi(t)]_{\omega=0}$$

et par la propriété de la symétrie:

$$TF[\Phi(t)]_{\omega=0} = [2\pi\phi(-\omega)]_{\omega=0} = 2\pi\phi(0)$$

Par la propriété de δ(x): $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$

$$2\pi\phi(0) = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)\phi(\omega)d\omega$$

Finalement, en reprenant l'équation de départ $\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\Phi(t)dt$ et en remplaçant le second membre par le résultat précédent qui est $2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)\phi(\omega)d\omega$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)\phi(\omega)d\omega$$

et en identifiant le contenu des intégrales des deux membres de l'équation:

TF[g(t)] = G(ω) = 2πδ(ω)

Noter que dans cet exemple nous avons conservé ω pour simplifier les écritures au lieu de travailler avec 2πf.

Exemple 2:

Calculer la TF de δ(t).

δ(t) est une fonction généralisée à progrès lent.

Par définition: $\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\Phi(t)dt$

soit $\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\Phi(t)dt = \Phi(0)$

aussi $\Phi(0) = TF\left[\phi(t)\right]_{\omega=0} = \left[\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)e^{-i\omega t}dt\right]_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(\omega)d\omega$ par changement de variable t → ω.

ainsi $\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} 1\phi(\omega)d\omega$

et par identification:

$$FT\left[\delta(t)\right] = G(\omega) = 1$$

On aurait pu faire le calcul directement : $\mathrm{FT}[\delta(\mathrm{t})] = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-i\omega t}dt = e^{-i\omega t}\Big|_{t=0} = 1$

En conclusion, la TF d'une constante est une fonction δ, et la TF d'une fonction δ est une constante.

Exemple 3:

Calculer la TF de $g(t)=\exp(i\omega_o t)$

$g(t)$ peut être réécrite sous la forme $g(t)=f(t)\exp(i\omega_o t)$. Par la propriété du décalage de la fréquence: $TF[f(t)\exp(i\omega_0 t)] = F(\omega-\omega_0)$. Et comme $f(t) = 1$, et de l'exemple 1 ci-dessus: $TF[1] = 2\pi\delta(\omega)$ ➔ $TF[\exp(i\omega_o t)] = 2\pi\delta(\omega-\omega_o) = \delta(\omega-\omega_o)$. C'est un décalage de fréquence ω_o de la fonction δ.

Exemple 4:

Calculer la TF de $\cos(\omega_o t)$ et $\sin(\omega_o t)$.

$\cos(\omega_o t) = (\exp(i\omega_o t) + \exp(-i\omega_o t))/2$

$TF[\cos(\omega_o t)] = TF[(\exp(i\omega_o t) + \exp(-i\omega_o t))/2]$

$= \pi\delta(\omega-\omega_o) + \pi\delta(\omega+\omega_o) = \delta(\omega-\omega_o) + \delta(\omega+\omega_o)$

Pour le sinus : $TF[\sin(\omega_o t)] = -i\pi\delta(\omega-\omega_o) + i\pi\delta(\omega+\omega_o) = -i\delta(\omega-\omega_o) + i\delta(\omega+\omega_o)$

Quelques fonctions courantes et leur transformée de Fourier

	$g(t)$	$G(w)$
Fonction de Dirac	$\delta(t)$	1 (la constante)
Fonction porte	$\Pi(t)$	$\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ (le sinus cardinal)
La Gaussienne de largeur proportionnelle ($\propto$) à a	e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{-\pi^2\omega^2}{4a}}$ (une Gaussienne $\propto \frac{1}{a}$)
L'exponentiel complexe de fréquence a	e^{iat}	$2\pi\delta(\omega - a) = \delta(\omega - a)$ (un Dirac décalé de a fréquences)
Le cosinus de fréquence a	$\cos(at)$	$\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a)$ (deux Dirac, aux fréquences a et $-a$)
Le sinus de fréquence a	$\sin(at)$	$-i\delta(\omega - a) + i\delta(\omega + a)$ (deux Dirac imaginaires, un à la fréquence a vers $-\infty$ et l'autre à $-a$)

TABLE 2 – Table des couples de fonctions $g(t)$ et Transformée de Fourier $G(\omega)$. La TF[$g(t)$]= $G(\omega)$ peut s'exprimer en fréquences f ou en fréquences angulaires $\omega = 2\pi f$. Dans la table, a répresente un scalaire réel.

Transformée de Fourier à deux dimensions

Si l'on remplace $2\pi f$ par ω, la paire de Fourier s'écrit:

$$G(\omega) = FT(g(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$g(t) = FT^{-1}(G(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} df$$

Par analogie, on détermine les paires en 2 dimensions (2D):

$$G(u,v) = TF(g(x,y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) e^{-i(ux+vy)} dxdy$$

$$g(x,y) = TF^{-1}(G(u,v)) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(u,v) e^{i(ux+vy)} dudv$$

Exercices :

1. Calculer la TF de $\delta(t-t_0)$.
2. Calculer la TF de $\delta(t+t_0)$.
3. Montrer que $TF[\delta(t+t_0) + 2\delta(t) + \delta(t-t_0)] = 4\cos^2(\omega t_0/2)$.