IMN 359 - Outils mathématiques du traitement d'images
Contenu du cours donné par le Pr. Maxime Descoteaux

I. Nombres complexes.
I.1. Définition

Problème posé aux algébristes du 16e siècle: Résoudre des équations du 2^e et 3^e degré:

Équations du 2^e degré:

$ax^2 + bx + c = 0$ Discriminant D: $D = b^2 - 4ac$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$x_{1,2}$ racines réelles et distinctes si D>0

$x_1 = x_2$ réelles si D=0

$x_{1,2}$ racines complexes conjuguées si D<0

La racine carrée d'un nombre réel a: $\sqrt{a^2} = \pm a$

Exemple: $\sqrt{2^2} = \pm 2$

Si le nombre est négatif: $\sqrt{-2^2} = \sqrt{i^2 2^2} = \pm 2i$

soit :

$$-1 = i^2$$

Exemples: $-2 \times -2 = (-2)^2 = 2^2 = 4$

$-2i \times -2i = (-2i)^2 = 2^2 i^2 = -4$

Confusions:

- Dans certains ouvrages, j représente la valeur complexe au lieu de i, comme en électricité, où la lettre i désigne l'intensité du courant.
- Les lettres i et j pourraient être utilisées comme les vecteurs unitaires d'un repère en 2D, dans ce cas là, choisir u et v comme vecteurs unitaires (ou e1 et e2 etc...).
- Dans certains logiciels, la lettre i est réservée à la valeur unitaire complexe (Matlab, ...), la distinguer de la variable utilisée dans les boucles.

Exemple 1:

Trouver les racines de $x^2 - 3x - 4 = 0$

Ce polynôme est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

Le discriminant vaut: $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25$.

D > 0 ==> Les racines sont réelles: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2}$

==> $x_1 = 4$ et $x_2 = -1$

Exemple 2:

Trouver les racines de $x^2 - 3x + 3 = 0$

Ce polynôme est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

Le discriminant vaut: $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3$.

D < 0 ==> Les racines sont imaginaires conjuguées: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{3 \pm \sqrt{-3}}{2}$ ==>

$$x_1 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \; x_2 = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Équations du 3^e degré:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0;$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \text{ ou } x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9} \quad R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54}$$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}} \quad T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

$$x_1 = S + T - \frac{a_1}{3}$$

$$x_2 = -\frac{S+T}{2} - \frac{a_1}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

$$x_3 = -\frac{S+T}{2} - \frac{a_1}{3} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

Exemple 1:

$4x^3+3x^2+2x+1=0$;

$\Rightarrow x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{2}{4}x+\frac{1}{4}=0$ ou $x^3+0.75x^2+0.5x+0.25a_3=0$

$$Q=\frac{3a_2-a_1^2}{9}=\frac{3\times 0.5-0.75^2}{9}=0.104$$

$$R=\frac{9a_1a_2-27a_3-2a_1^3}{54}=\frac{9\times 0.75\times 0.5-27\times 0.25-2\times 0.75^3}{54}=-0.078$$

$$S=\sqrt[3]{R+\sqrt{Q^3+R^2}}=\sqrt[3]{-0.078+\sqrt{0.104^3+(-0.078)^2}}=0.190$$

$$T=\sqrt[3]{R-\sqrt{Q^3+R^2}}=\sqrt[3]{-0.078-\sqrt{0.104^3+(-0.078)^2}}=-0.546$$

$$x_1=S+T-\frac{a_1}{3}=0.19-0.546-\frac{0.75}{3}=-0.606$$

$$x_2=-\frac{S+T}{2}-\frac{a_1}{3}+\frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T)=-\frac{0.19-0.546}{2}-\frac{0.75}{3}+\frac{i\sqrt{3}}{2}(0.19+0.546)=-0.072+0.637i$$

$$x_3=-\frac{S+T}{2}-\frac{a_1}{3}-\frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T)=-\frac{0.19-0.546}{2}-\frac{0.75}{3}-\frac{i\sqrt{3}}{2}(0.19+0.546)=-0.072-0.637i$$

Nombre complexe z = a + ib avec a et b réels ou z = (a,b)

a est la partie réelle de z: a = *Re*(z). b est la partie imaginaire de z: b = *Im*(z).

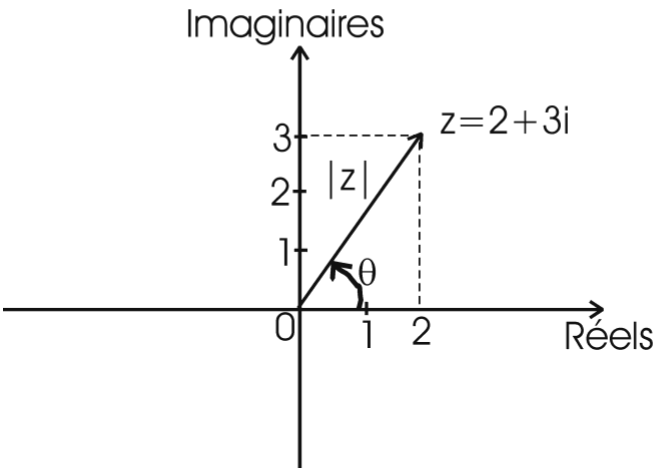

Figure 1. Représentation graphique d'un nombre complexe. La partie réelle est portée par l'axe des **<u>abscisses</u>**, et la partie imaginaire est portée par l'axe des **<u>ordonnées</u>**.

I.2. Opérations sur les nombres complexes (représentation algébrique ou cartésienne)

Addition:

$z1 = a1 + ib1$; $z2 = a2 + ib2$:

$$z1 + z2 = (a1 + a2) + i(b1 + b2) = (a1 + a2, b1 + b2)$$

Exemple: $z1 = 3 + 2i$; $z2 = 6 + 5i$; $z1 + z2 = 9 + 7i$

$z1 = -3 + 2i$; $z2 = 6 - 5i$; $z1 + z2 = 3 - 3i$

Multiplication:

$z1 = a1 + ib1$; $z2 = a2 + ib2$:

$$z1 \times z2 = a1 \times (a2 + ib2) + ib1 \times (a2 + ib2)$$

$= a1a2 + ia1b2 + ib1a2 + i^2b1b2$

$= a1a2 - b1b2 + i(a1b2 + a2b1) = (a1a2 - b1b2, a1b2 + a2b1)$

Exemple 1: $z1 = 2 + 3i$; $z2 = 4 + 5i$;

$z1\times z2 = (2 \times 4 - 3 \times 5, 2 \times 5 + 4 \times 3) = (-7, 22) = -7 + 22i$

$z1 = 2 - 3i$; $z2 = 4 + 5i$;

$z1\times z2 = (2 \times 4 - (-3) \times 5, 2 \times 5 + 4 \times (-3)) = (23, -2) = 23 - 2i$

Conjugué:

$\bar{z} = a - ib$ est le conjugué de $z = a + i$

Module:

Le module (ou la valeur absolue ou la longueur du vecteur $\vec{z}$) de $z = a + ib$ s'écrit comme $|z|$:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Sous forme vectorielle de $z = (a,b)$: $z^2 = a^2 + b^2$ (théorème de Pythagore).

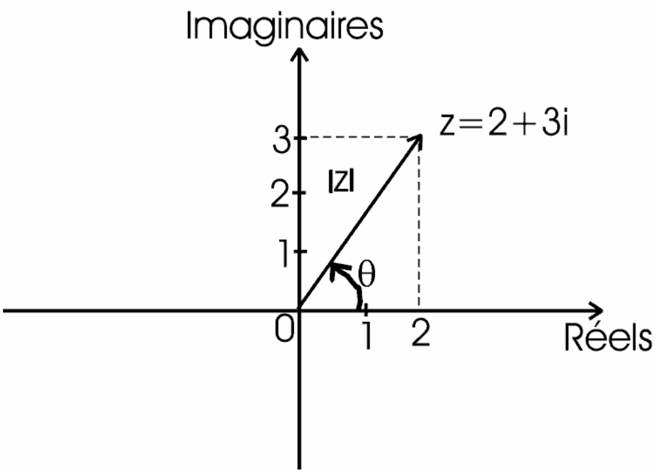

Figure 2. Module d'un nombre complexe

Division:

$$z = a + ib$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

ainsi $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$ avec $z \neq 0$

z1 = a1 + ib1; z2= a2 + ib2

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2} = \frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)} = \frac{a_1a_2+b_1b_2+i(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}$$

Exemple:

Résoudre le système d'équation (par substitution, addition, déterminant etc...):

$(3 + 2i)x_1 + (1 + 3i)x_2 = 3$

$2x_1 + (2 + i)\, x_2 = 5$

Le déterminant est donné par

$$D = \begin{vmatrix} 3+2i & 1+3i \\ 2 & 2+i \end{vmatrix} = (3+2i)(2+i) - 2(1+3i) = 6 - 2 + i(3+4) - 2 - 6i = 2 + i$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1+3i \\ 5 & 2+i \end{vmatrix}}{2+i} = \frac{3(2+i)-5(1+3i)}{2+i} = \frac{6+3i-5-15i}{2+i} = \frac{1-12i}{2+i} = \frac{(1-12i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{-10-25i}{5}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3+2i & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{2+i} = \frac{5(3+2i)-2\times 3}{2+i} = \frac{15+10i-6}{2+i} = \frac{9+10i}{2+i} = \frac{(9+10i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{28+11i}{5}$$

Matriciellement: $\begin{vmatrix} 3+2i & 1+3i \\ 2 & 2+i \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix}$

de la forme Ax = B d'où x = A\B en Matlab.

Interprétation géométrique

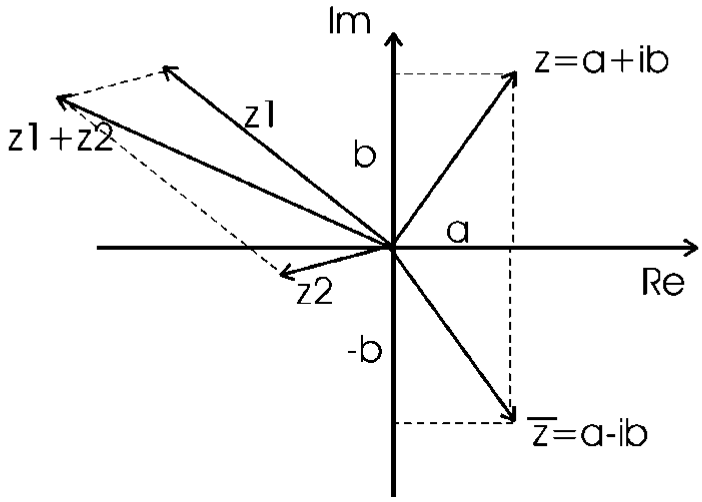

Figure 3. Représentation géométrique des vecteurs.

I.3. Forme polaire d'un nombre complexe (représentation trigonométrique)

z = a + ib et $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

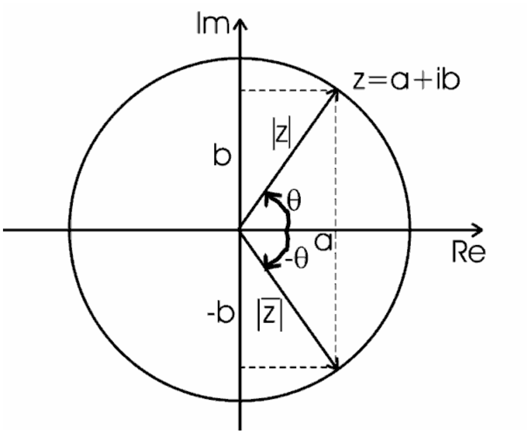

Figure 4. Représentation polaire d'un nombre complexe. θ est l'angle formé par z et l'axe des réels.

Si on appelle r = |z|, alors a = rcos(θ) et b = rsin(θ) ⇒

z = r(cos(θ) + isin(θ))

L'angle θ est appelé l'argument du nombre complexe z: θ = arg(z).

$$arg(z) = acos(\frac{a}{r}) = \cos^{-1}(\frac{a}{r})$$

$$\arg(z) = a\sin(\frac{b}{r}) = \sin^{-1}(\frac{b}{r})$$

$$arg(z) = atan(\frac{b}{a}) = tan^{-1}(\frac{b}{a})$$

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = r(\cos(\theta) - i\sin(\theta))$$

$$\Rightarrow \quad \bar{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \Rightarrow \quad \arg(z) = -\arg(\bar{z})$$

Si $z_1 = r_1(\cos(\theta_1 + i\sin(\theta_1))$ et $z_2 = r_2(\cos(\theta_2 + i\sin(\theta_2))$

alors:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

et

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

I.4. La notation d'Euler (représentation exponentielle)

Le développement en série de Taylor (MacLaurin à x - a = x) de f(x):

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}x^n + \ldots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x6}{6!} + \frac{x^7}{7!} \ldots\ldots$$

$\Rightarrow$ avec $i^2 = -1$; $i^4 = 1$; $i^6 = -1$

$$\cos(x) = 1 + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \frac{i^6x^6}{6!} + \ldots.$$

$$i\sin(x) = ix + i\frac{i^2x^3}{3!} + i\frac{i^4x^5}{5!} + i\frac{i^6x^7}{7!} + \ldots = ix + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^5x^5}{5!} + \frac{i^7x^7}{7!} + \ldots$$

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \frac{i^5x^5}{5!} + \frac{i^6x^6}{6!} + \frac{i^7x^7}{7!} \ldots = \cos(x) + i\sin(x)$$

$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = re^{i\theta}$: c'est la notation d'Euler.

Conjugué:

$$\bar{z} = r(\cos(\theta) - i\sin(\theta)) = re^{-i\theta}$$

Expressions du Cosinus et du sinus:

$$z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)\,; \quad \bar{z} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$$

$$z + \bar{z} = 2\cos(\theta) = e^{i\theta} + e^{-i\theta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}}$$

et $$z - \bar{z} = 2i\sin(\theta) = e^{i\theta} - e^{-i\theta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Multiplication:

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \text{ et } z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}}$$

Division:

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \text{ et } z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}}$$

Les dérivées:

$$\frac{d(e^{i\theta})}{d\theta} = ie^{i\theta} = -\sin(\theta) + i\cos(\theta)$$

Les intégrales:

$$\int e^{i\theta} d\theta = \frac{e^{i\theta}}{i} + cte = -ie^{i\theta} + cte = \sin(\theta) - i\cos(\theta) + cte$$