b- Retrouver, à partir du vecteur décomposé de S de l'exercice 1 ci-dessus, les coefficients C^2, C^1 puis le signal S.

La transformée de Haar en 2D
La transformée de Haar en 2D s'obtient en transformant selon les lignes, puis le résultat est trasnformé selon les colonnes.

Exemple:

$$S = \begin{pmatrix} s_{00} & s_{01} \\ s_{10} & s_{11} \end{pmatrix}$$

Algébriquement:

$$C_l^1 = \begin{pmatrix} \frac{s_{00}+s_{01}}{2} & \frac{s_{00}-s_{01}}{2} \\ \frac{s_{10}+s_{11}}{2} & \frac{s_{10}-s_{11}}{2} \end{pmatrix}$$ calculs selon les lignes.

$$C^1 = \begin{pmatrix} \frac{s_{00}+s_{01}}{2}+\frac{s_{10}+s_{11}}{2} & \frac{s_{00}-s_{01}}{2}+\frac{s_{10}-s_{11}}{2} \\ \frac{s_{00}+s_{01}}{2}-\frac{s_{10}+s_{11}}{2} & \frac{s_{00}-s_{01}}{2}-\frac{s_{10}-s_{11}}{2} \end{pmatrix} / 2$$ Calculs selon les colonnes.

$$= \begin{pmatrix} (s_{00}+s_{01})+(s_{10}+s_{11}) & (s_{00}-s_{01})+(s_{10}-s_{11}) \\ (s_{00}+s_{01})-(s_{10}+s_{11}) & (s_{00}-s_{01})-(s_{10}-s_{11}) \end{pmatrix} / 4$$

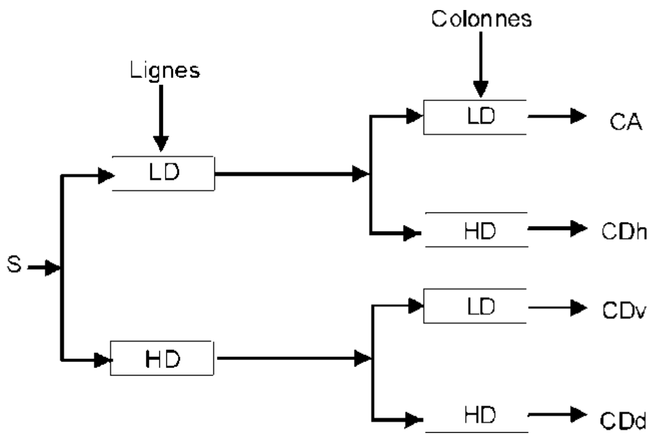


Figure. Diagramme représentant la décomposition d'une matrice S selon les lignes, puis selon les colonnes, en appliquant les filtres de décomposition de basse fréquence LD et de haute fréquence HD, pour obtenir les coefficients des approximations CA, les coefficients des détails horizontaux CDh, verticaux CDv, et diagonaux CDd, et ce pour un niveau 1 de décomposition.

La décomposition de S ci-dessus s'exprime:

$$
C^1 = \begin{pmatrix} (s_{00}+s_{01})+(s_{10}+s_{11}) & (s_{00}-s_{01})+(s_{10}-s_{11}) \\ (s_{00}+s_{01})-(s_{10}+s_{11}) & (s_{00}-s_{01})-(s_{10}-s_{11}) \end{pmatrix} / 4
$$

$$
= \begin{pmatrix} s_{00}+s_{01}+s_{10}+s_{11} & s_{00}-s_{01}+s_{10}-s_{11} \\ s_{00}+s_{01}-s_{10}-s_{11} & s_{00}-s_{01}-s_{10}+s_{11} \end{pmatrix} / 4
$$

$$
= \begin{pmatrix} s_{00}+s_{01}+s_{10}+s_{11} & s_{00}+s_{10}-s_{01}-s_{11} \\ s_{00}+s_{01}-s_{10}-s_{11} & s_{00}+s_{11}-s_{01}-s_{10} \end{pmatrix} / 4
$$

$$
= \begin{pmatrix} CA & CDv \\ CDh & CDd \end{pmatrix}
$$

<u>Habituellement, les coefficients s'écrivent selon : $\begin{pmatrix} CA & CDh \\ CDv & CDd \end{pmatrix}$, et donc selon les calculs précédents on doit permuter CDh et CDv</u>.

Exemple:
Voici un exemple de décomposition au niveau 1 de l'image suivante :

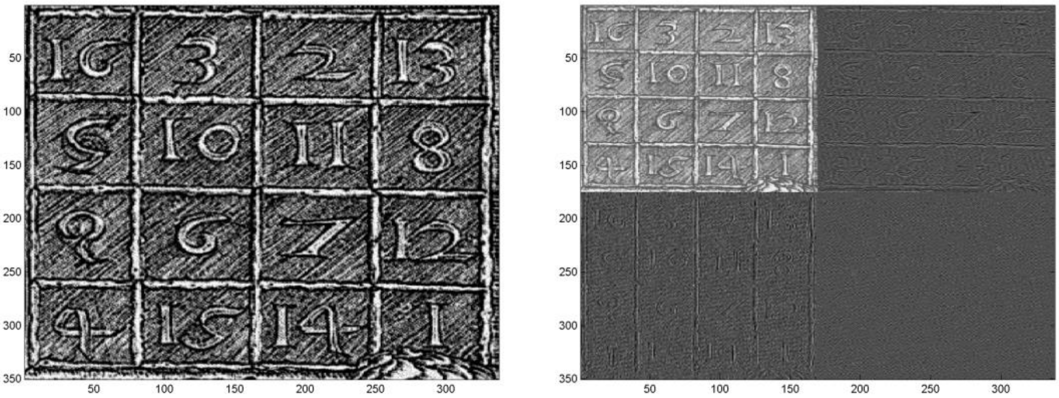


Figure. Image décomposée au niveau 1 par l'ondelette de Haar montrant les coefficients des approximations, des détails horizontaux, verticaux et diagonaux.

Exemple 2 :
Voici maintenant un exemple de la décomposition au niveau 3 de l'image de woman.

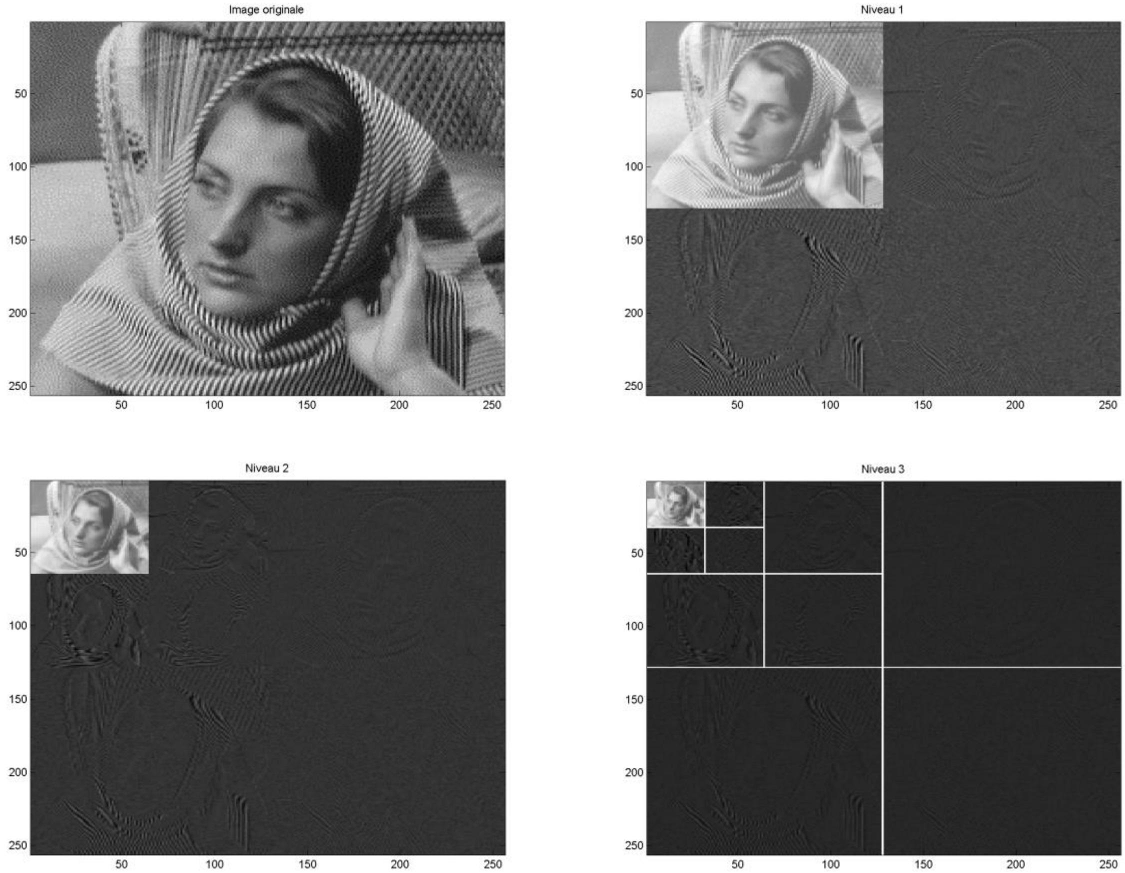


Figure. Image de woman décomposée aux niveaux 1, 2 et 3 avec dwt2. L'image peut aussi être directement décomposée avec wavedec1:

Exercice 1.

Décomposer $S = \begin{pmatrix} a & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix}$ selon les lignes-colonnes puis selon les colonnes-lignes et comparer les résultats. Reconstruire S à partir des coefficients.

Exercice 2.

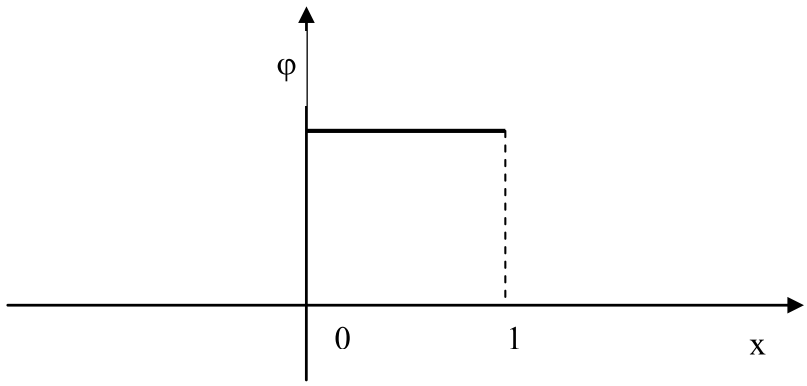
Décomposer $S = \begin{pmatrix} a & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} \\ \mathrm{e} & \mathrm{f} & \mathrm{g} & \mathrm{h} \\ \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} & \mathrm{l} \\ \mathrm{m} & \mathrm{n} & \mathrm{o} & \mathrm{p} \end{pmatrix}$ au niveau 1 selon les lignes-colonnes puis selon les colonnes-lignes et comparer les résultats.

Théorie des ondelettes.

Les ondelettes de Haar

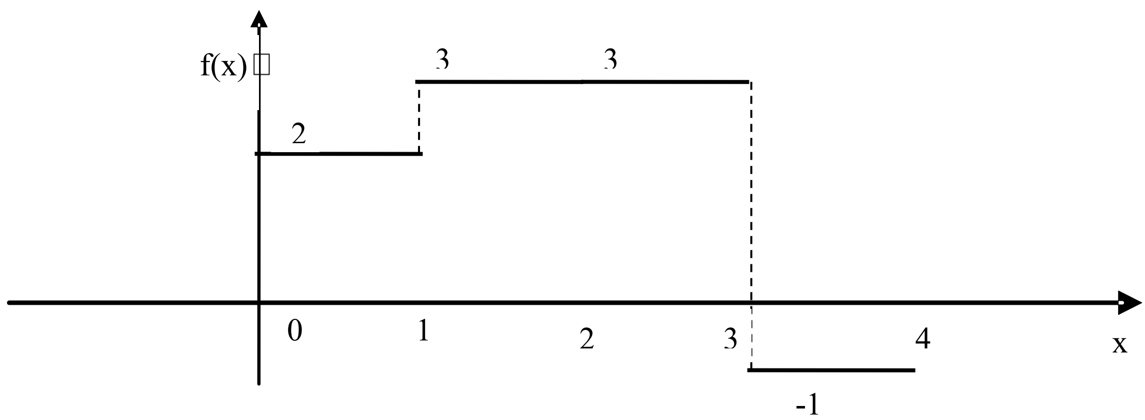
Nous avons vu la définition de la fonction suivante:

$$\varphi_{[0,1[}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Pour une fonction f(x) contenant plusieurs blocs, on l'exprime comme suit:

$$f(x)=2\varphi(x)+3\varphi(x-1)+3\varphi(x-2)-\varphi(x-3$$



D'une forme générale, f(x) s'exprime comme suit:

$f(x) = \sum_{k \in Z} a_k \varphi(x-k)$ $\qquad a_k \in R$

Les ondelettes permettent de traiter des signaux de haute résolution ou haute fréquence. Les blocs devraient alors être raccourcis.

$\varphi(2x)$ raccourcit le bloc de moitié par rapport à $\varphi(x)$:
$\varphi(x)=1$ si $0 \le x < 1$
$\varphi(2x)=1$ si $0 \le 2x < 1$ ou $0 \le x < 1/2$

et la forme générale devient:

$$f(x)=\sum_{k\in Z} a_k \varphi(2x-k) \qquad a_k \in R$$

φ(4x) raccourcit le bloc de 4 fois par rapport à φ(x):
φ(x)=1 si 0 ≤ x < 1
φ(4x)=1 si 0 ≤ 4x < 1 ou 0 ≤ x < 1/4
et la forme générale devient:

$$f(x)=\sum_{k\in Z} a_k \varphi(4x-k) \qquad a_k \in R$$

En généralisant, on obtient la forme suivante:

$$f(x)=\sum_{k\in Z} a_k \varphi(2^j x-k) \qquad a_k \in R \text{ et } j \in N$$

ici le paramètre j réfère à la dilatation et le paramètre k réfère à la translation.

Nous avons vu au début du chapitre précédent la définition de □:

$$\psi_{[0,1[} = \varphi_{[0,1/2[} - \varphi_{[1/2,1[}$$

Celle-ci peut prendre la forme:

$$\psi(x)=\varphi(2x)-\varphi(2(x-1/2))=\varphi(2x)-\varphi(2x-1)$$

qui peut s'exprimer sous la forme générale:

$$\psi(x)=\sum_{l\in Z} a_l \varphi(2x-l)$$

L'ondelette ψ et la fonction d'échelle φ sont orthonormales:

$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\varphi(x-k)dx=0$ qui peut être démontrée comme suit:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\varphi(x-k)dx=0 \;\Rightarrow\; \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\varphi(x)dx=0 \text{ avec } k=0 \;\Rightarrow\; \int_{0}^{1/2} 1\,dx - \int_{1/2}^{1} 1\,dx = 1/2-1/2=0$$

Il arrive dans certains ouvrages d'exprimer autant φ que ψ sous une forme paramétrique normalisée:

$$\varphi_k^j(x)=\sqrt{2^j}\,\varphi(2^j x-k)$$
$$\psi_k^j(x)=\sqrt{2^j}\,\psi(2^j x-k)$$

j = 0, 1, 2, ...; k = 0, 1, ..., $2^j - 1$

Ces expressions sont identiques à celles précédemment annoncées, sauf le coefficient $2^{j/2}$ qui est un facteur de normalisation de façon à obtenir:

$$\left\langle \varphi_k^j, \varphi_k^j \right\rangle = \int_0^1 \left[\varphi_k^j(x)\right]^2 dx = 1$$

$$\left\langle \psi_k^j, \psi_k^j \right\rangle = \int_0^1 \left[\psi_k^j(x)\right]^2 dx = 1$$

Par le fait de la normalisation, les filtres de décomposition de Haar s'écrivent:
LD = [1   1]/$2^{1/2}$
HD = [1   -1]/$2^{1/2}$

En 2D, on obtient le filtre de décomposition suivant:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} / 2^{1/2}$$

Ce filtre est développé pour une matrice de 4 x 4 utilisé dans une multiplication matricielle:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} / 2^{1/2}$$

Le filtre de reconstruction est déduit par transposition du filtre de décomposition.

NOTE: ces filtres génèrent une matrice des coefficients comme suit:

$$\begin{bmatrix} ca & \mathrm{cv} \\ \mathrm{ch} & \mathrm{cd} \end{bmatrix}$$

Les ondelettes continues.

Soit ψ une fonction continue et intégrable.

Pour être une ondelette, la fonction ψ doit vérifier les 2 conditions d'admissibilité suivantes:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)dt = 0 \quad \text{et} \qquad \|\psi(t)\| = 1$$

(Rappel: norme de f: $\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2} = \left(\int_0^T f(t)\bar{f}(t)dt\right)^{1/2} = \left(\int_0^T |f(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$)

À partir de la fonction ψ, on construit une famille de fonctions $\psi_{a,b}(t)$ telles que:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \qquad \text{avec } a \in R^{+} \text{ et } b \in R$$

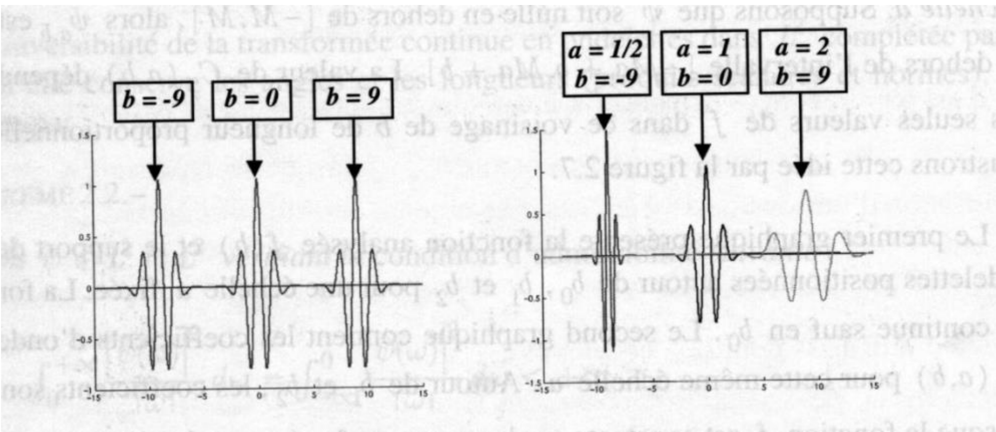


Figure 2.6. *Translation et translation-dilatation d'une ondelette*

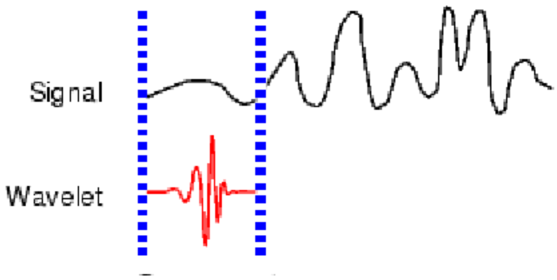
Les coefficients d'une fonction f(t) décomposée par l'ondelette $\psi_{a,b}(t)$ sont donnés par:

$$C_f(a,b) = \int_R f(t)\overline{\psi_{a,b}(t)}dt = \langle f, \psi_{a,b}\rangle$$

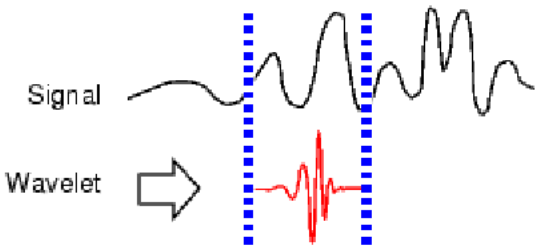
où $\langle f, \psi_{a,b}\rangle$ est le produit scalaire.

Exemple:

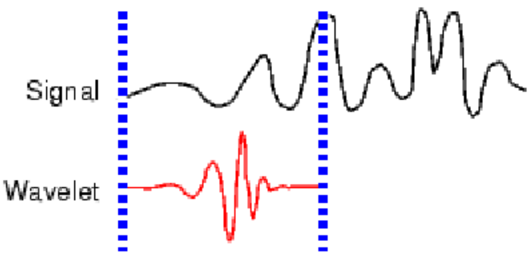
Ajuster l'ondelette sur la gauche de la fonction et calculer le coefficient:



Avancer l'ondelette d'une position à la fois sur la fonction et calculer le coefficient:

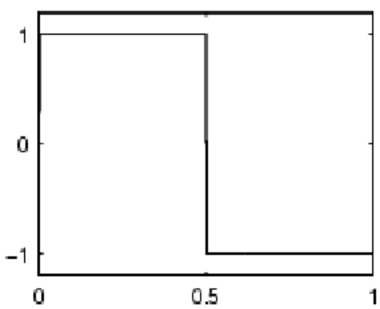


Quand toutes les positions de la fonction sont parcourues, dilater l'ondelette et parcourir les positions de la fonction de nouveau:

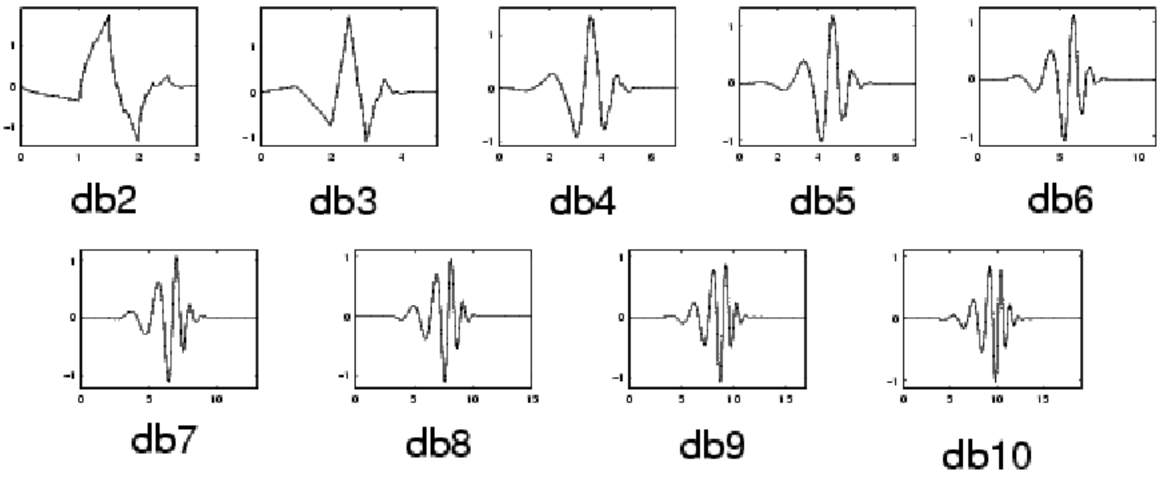


Exemple d'ondelettes:

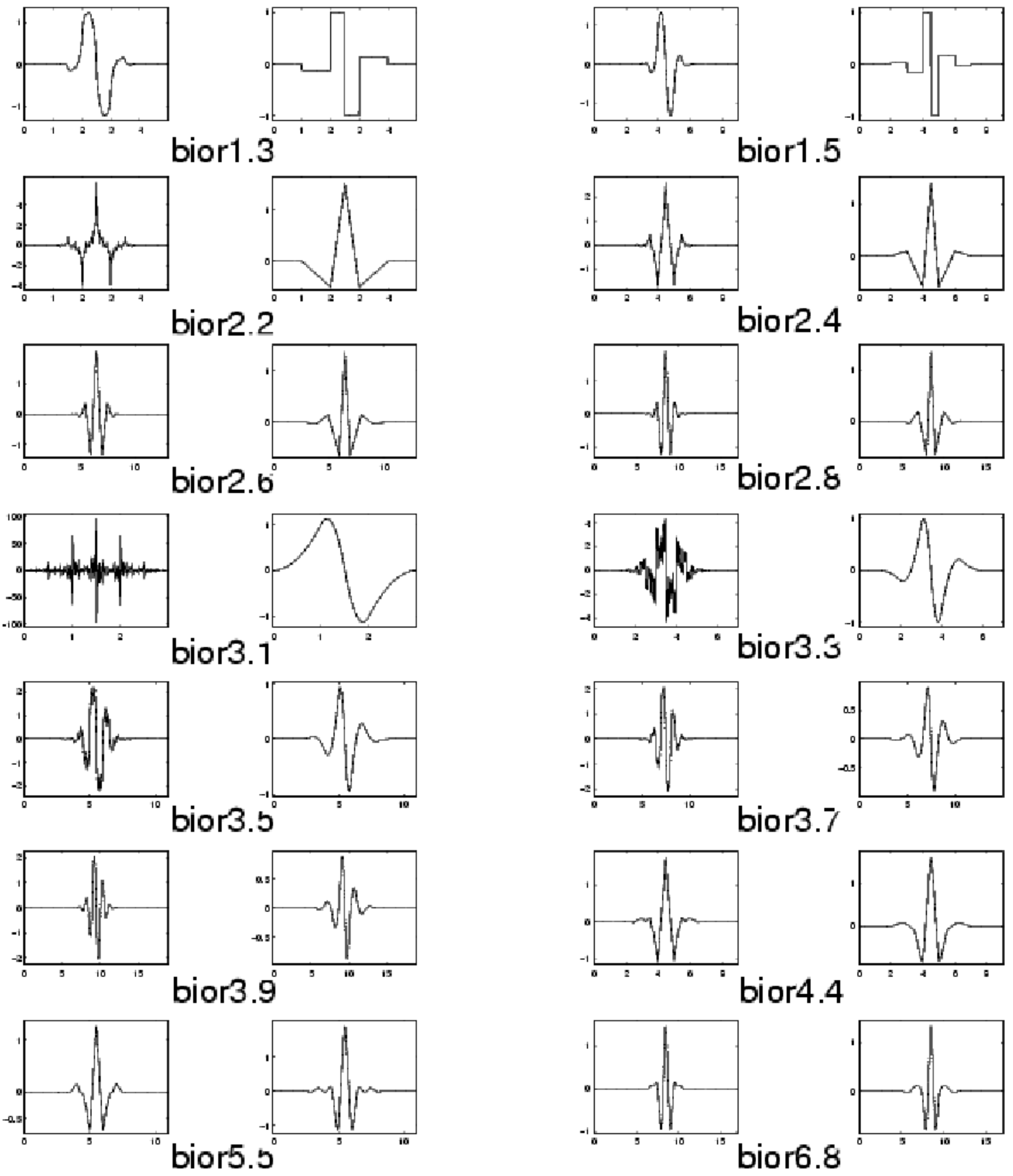
Ondelette de Daubechies d'ordre 1 ou de Haar



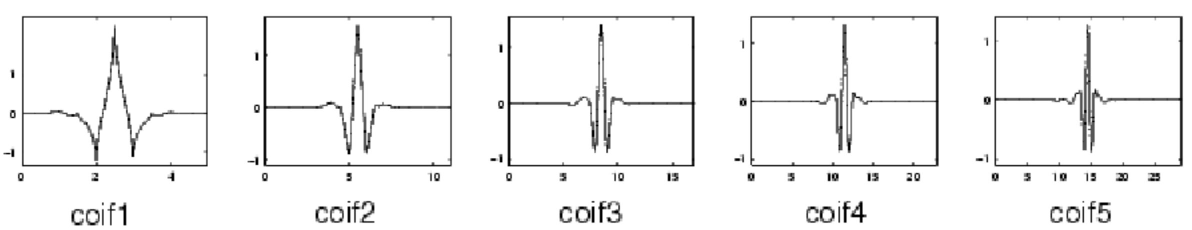
Ondelettes de Daubechies d'ordre 2 à 10:



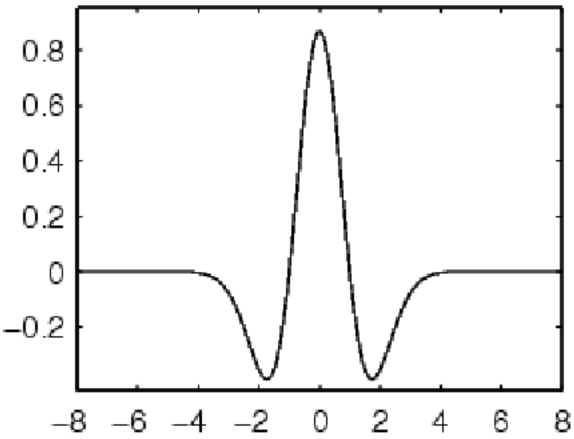
Ondelettes biorthogonales:



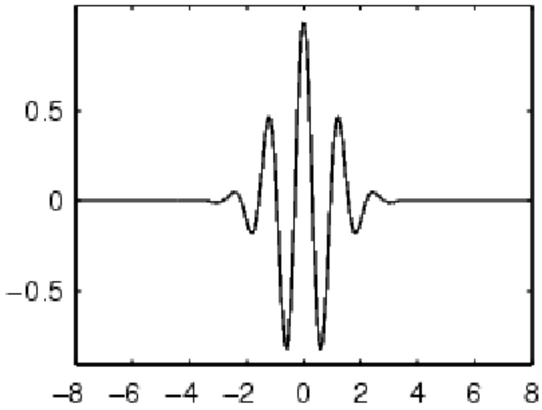
Ondelettes coiflet



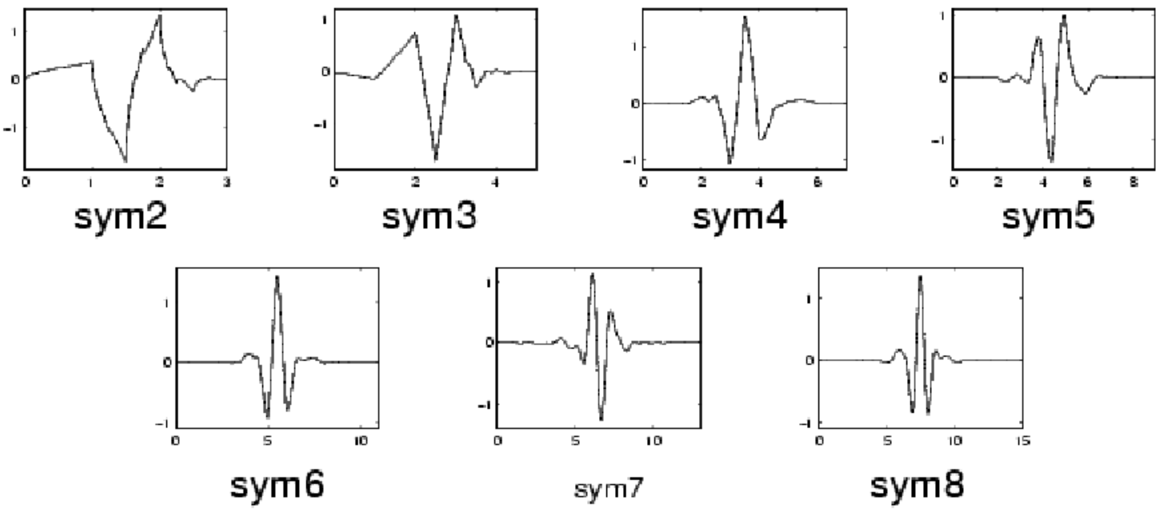
Ondelette mexican hat



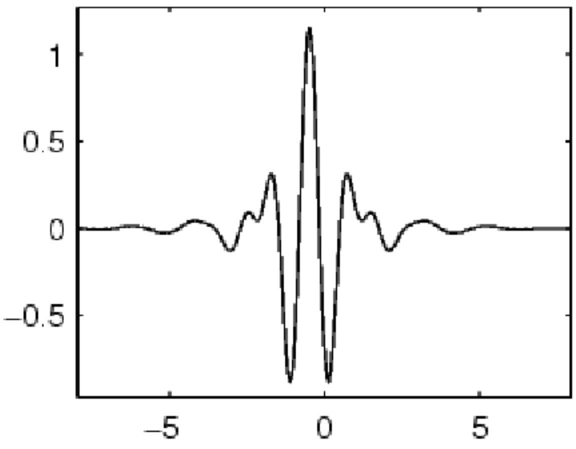
Ondelette morlet



Ondelettes symlets

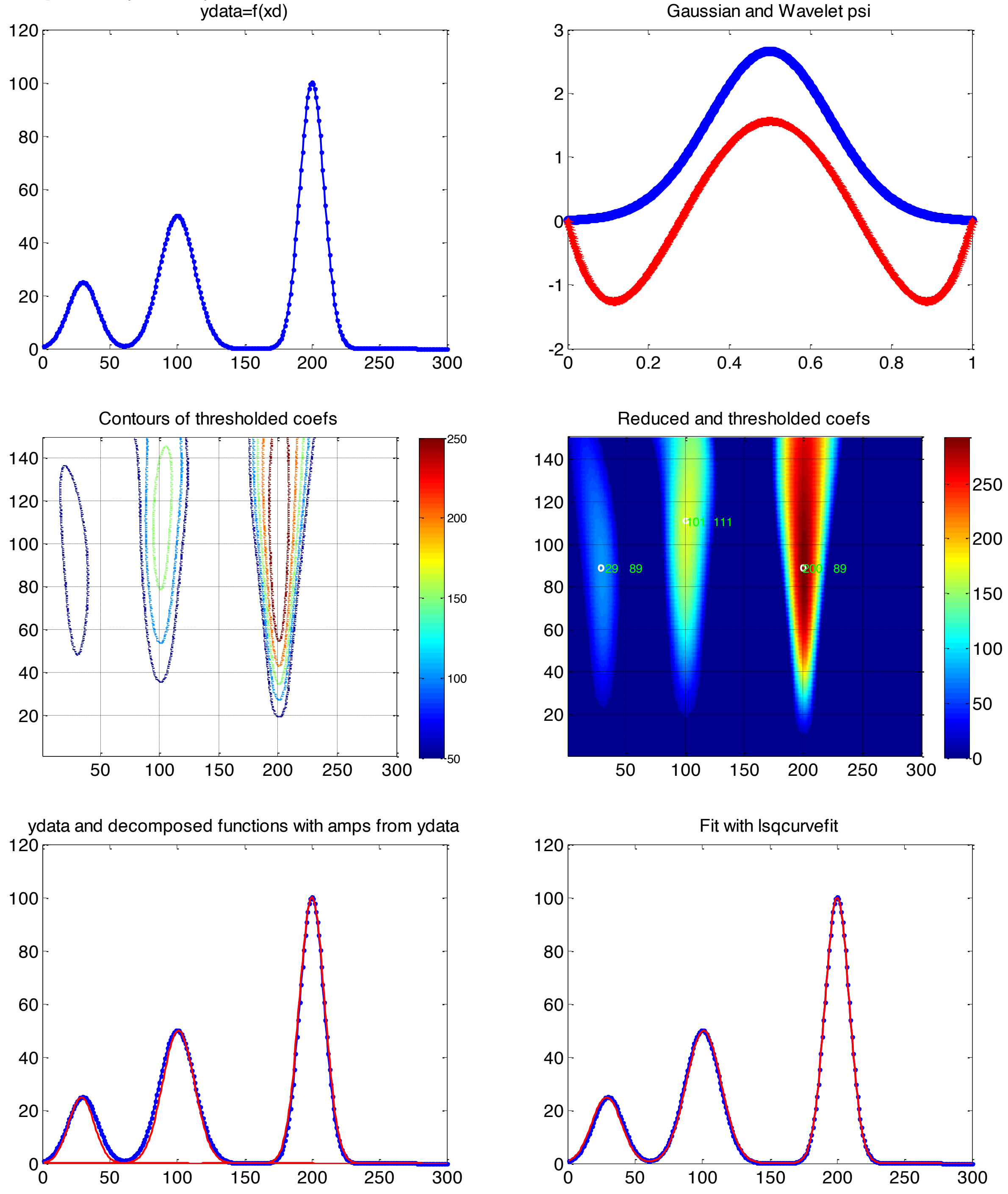


Ondelette meyer


1
0.5
0
−0.5
−5
0
5

Exercices et applications des ondelettes.

Exemple 1: (cwtb2)



Exemple 2:

y = [2 2 6 3 2];

Avec Matlab:

echelle=2;c=cwt(y, echelle,'db1');c, % db1 ondelette 1D de Daubechies <==> Haar.

Par la convolution:

for i=1:length(y);y1=[0 y 0];cy(i)=sum(y1(i:i+1).*[1 -1]/2^(1/2));end;cy

c = cy = -1.4142 0 -2.8284 2.1213 0.7071

y = [2 2 6 3 2];

echelle=4;

c=cwt(y, echelle,'db1');c, % db1 ondelette 1D de Daubechies <==> Haar.

for i=1:7;y1=[0 0 0 y 0 0 0];cy(i)=sum(y1(i:i+3).*[1 1 -1 -1]/2^(2/2));end;cy

c = -2 -3 -2.5 1.5 3.5

cy = -1 -2 -3 -2.5 1.5 3.5 2.5

Dans cy, les multiplications doivent être appliquées symétriquement sur les valeurs de f, puis retenir la partie centrale de même longueur que f.

y = [2 2 6 3 2];

c=cwt(y, 2^3,'db1');c,

y1=[0 0 0 0 0 0 0 0 y 0 0 0 0 0 0 0 0];for i=1:length(y1)-7;cy(i)=sum(y1(i:i+7).*[1 1 1 1 -1 -1 -1 -1]/2^(3/2));end;[c'-cy(5:9)']

Programme non-généralisé et non-validé:

n=4;y = [2 2 6 3 2];

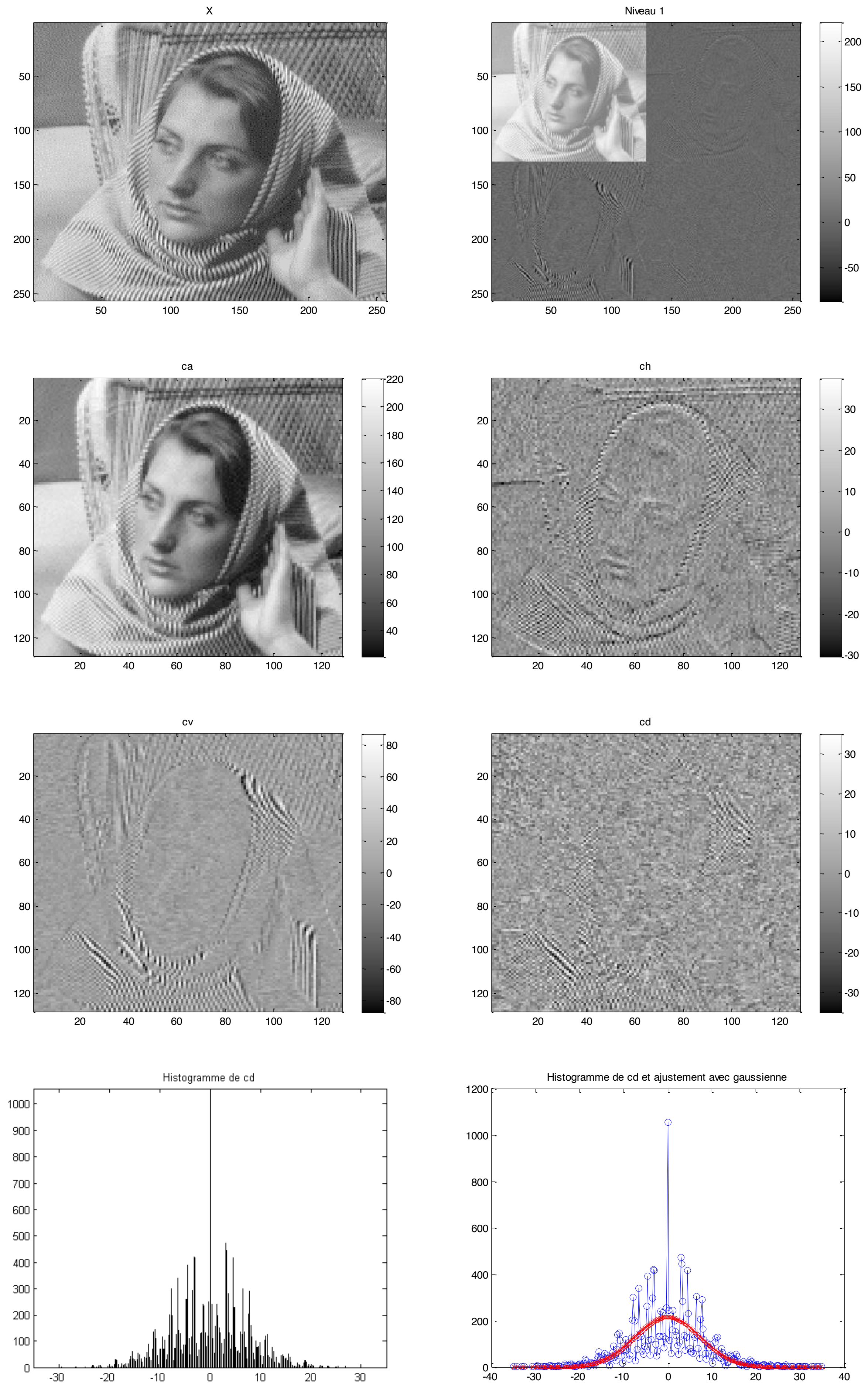
c=cwt(y, 2^n,'db1');y1=[zeros(1,2^n) y zeros(1,2^n)];

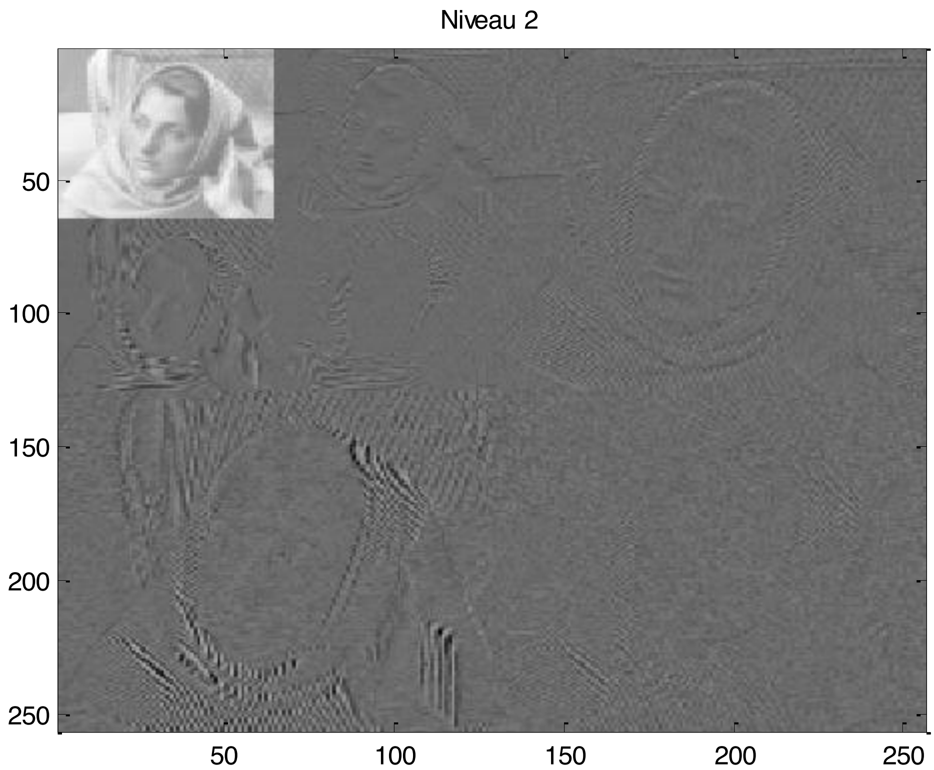
for i=1:length(y1)-2^n+1;cy(i)=sum(y1(i:i+2^n-1).*[ones(1,2^n/2) -ones(1,2^n/2)]/2^(n/2));end;

cy(1:2^n/2)=[];cy(end-2^n/2:end)=[];[c'-cy']

Exemple 3:

```
load woman; figure;imagesc(X);colormap(map);title('X');colorbar;
n=1;[LD,HD,LR,HR] = wfilters('haar');
dd=wavedec1(X,n,LD,HD);figure;imagesc(dd);colormap(map);title('Niveau 1');
ca0=dd(1:128,1:128);figure;imagesc(ca0);colormap(map);title('ca0'); colorbar;
ch0=dd(1:128,129:256);figure;imagesc(ch0);colormap(map);title('ch0'); colorbar;
cv0= dd(129:256,1:128);figure;imagesc(cv0);colormap(map);title('cv0'); colorbar;
cd0= dd(129:256,129:256);figure;imagesc(cd0);colormap(map);title('cd0'); colorbar;

dr=waverec1(dd,n,LR,HR);figure;imagesc(dr);colormap(map);colorbar;title('dr');
figure;imagesc(X-dr);colormap(map);colorbar;title('X-dr');

a=cd0; x=min(min(a)):0.01:max(max(a));nd=hist(a(:),x);
figure;bar(x,nd,'r');axis([min(min(a)) max(max(a)) -inf
inf]);title('cd');nd0=nd;in=find(nd==0);nd(in)=[];x0=x;x(in)=[];[parm,yfit]=lsqcurvefit_gauss1(
400,20,0,x,nd);

ch0(find(abs(ch0)>10))=0;
cv0(find(abs(cv0)>20))=0;
cd0(find(abs(cd0)>0))=0;

ddm=[ca0 ch0;cv0 cd0];

dr=waverec1(ddm,n,LR,HR);figure;imagesc(dr);colormap(map);colorbar;title('dr');
figure;imagesc(X);colormap(map);colorbar;title('X'); figure;imagesc(X-
dr);colormap(map);colorbar;title('X-dr');

figure;plot(1:256,X(88,:),'b-',1:256,dr(88,:),'r-');legend('Profile 88 de X','Profile 88 de dr');
```


X
Niveau 1
ca
ch
cv
cd
Histogramme de cd
Histogramme de cd et ajustement avec gaussienne


Niveau 2
50
100
150
200
250
50
100
150
200
250

Exercice 1. Écrire la somme des fonctions ϕ sur r_j = 0 1/8 2/8 3/8 4/8 5/8 6/8 7/8 et déssiner le graphique de s = (8 6 7 3 1 1 2 4).

Exercice 2. Décomposer au niveau 3 le signal s = (2 5 7 4 0 1 8 2), puis reconstruire le résultat pour retrouver s.

Exercice 3. Décomposer au niveau 2 l'image s, puis reconstruire le résultat pour retrouver s:

$$s = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Résultat Matlab:				
	4.5	0	2	2
	-0.5	1	-2	2
	0	1	1	0
	-1	1	0	0

Exercice 4.

a) Lire l'image woman et la décomposer par l'ondelette de Haar au niveau 1.
b) Pour la reconnaissance qualitative du visage, peut-on perdre de l'information en compressant l'image de 256 x 256 à 128 x 128?
c) En mettant les détails diagonaux à zéro, reconstruire l'image X pour obtenir dr. Tracer le profil 88 à travers X et dr sur la même figure. Quel est l'effet de mettre les détails à 0?
d) Calculer l'histogramme des coefficients d'approximation, et des 3 détails. Quelle est la forme de chacun des 4 histogrammes?
e) Sur les histogrammes des coefficients de détails, choisir un seuil pour mettre à zéro certaines valeurs, puis reconstruire l'image dr et la comparer à l'image X.