Les ondelettes.

Soit un phénomène physique représenté par la fonction f(x) suivante :

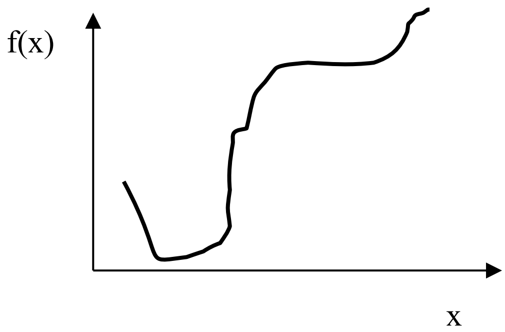


Figure. Signal réel.

Ce phénomène ne peut être mesuré ni représenté qu'à certains points spécifiques. Ces points pourraient être des valeurs ponctuelles ou des moyennes de valeurs sur un intervalle de temps, d'espace, d'énergie etc.… comme représenté à la figure suivante :

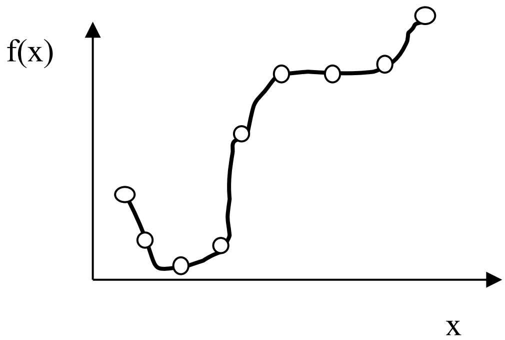


Figure. Signal mesuré à certains échantillonnages réguliers ou irréguliers.

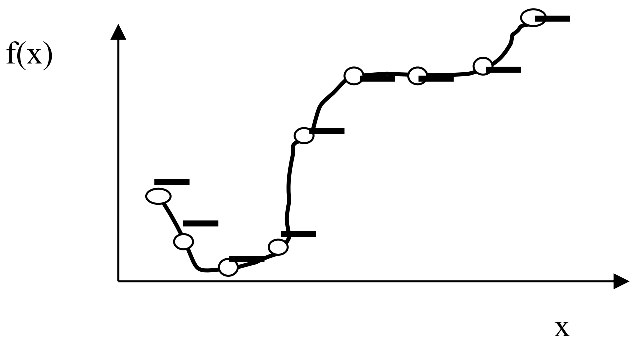
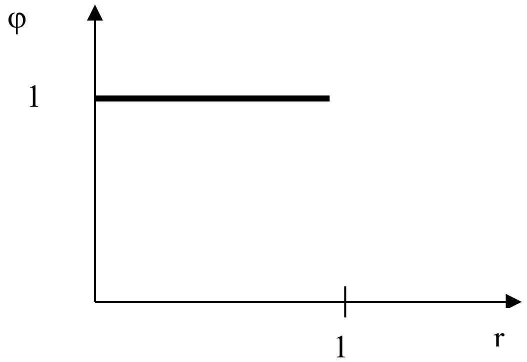


Figure. Au lieu de représenter un signal par des points échantillonnés, on peut le représenter par des barres horizontales, ou fonction en escalier. Ces barres devraient être de même longueur.

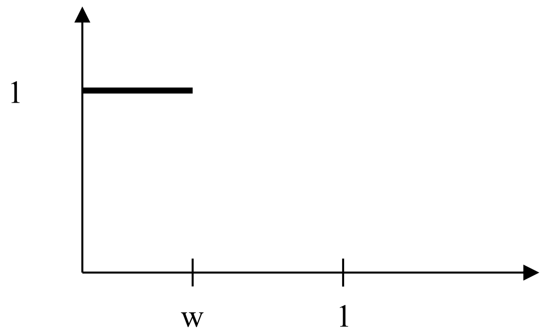
Le pas de chaque fonction en escalier (ou fonction à pas, step function) est défini sur un intervalle spécifique. La fonction à pas unitaire s'exprime par :

$$\varphi_{[0,1[}(r)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad 0\le r<1\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$



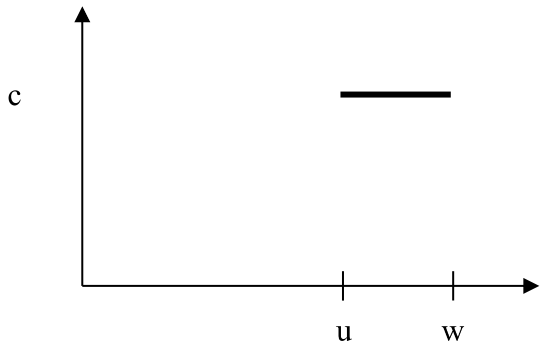
La fonction échantillonnée peut être représentée par des déplacements (shift) et des dilatations (dilation) des pas de la fonction à pas. Exemple rétrécissement du pas de 1 à w:

$$\varphi_{[0,w[}(r)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad 0\le r<w\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$



Déplacement de 0 vers u :

$$c\varphi_{[u,w[}(r)=\begin{cases}c & \text{si} \quad u\le r<w\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$



Forme générale pour un point quelconque j:

$$(s_j,r_j)=s_j.\varphi_{[r_j,r_{j+1}[}(r)=\begin{cases}s_j & \text{si} \quad r_j\le r<r_{j+1}\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

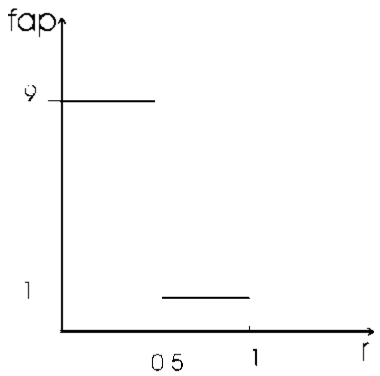
En considérant tous les pas approximant une fonction f par f_{ap}:

$$f_{ap} = s_0.\varphi_{[r_0,r_1[} + s_1.\varphi_{[r_1,r_2[} + \ldots + s_{n-1}.\varphi_{[r_{n-1},r_n[} = \sum_{j=0}^{n-1} s_j \varphi_{[r_j,r_{j+1}[} = \sum_{j=0}^{n-1} (s_j, r_j)$$

Exemple 1.

j	0	1
r_j	0	½
s_j	9	1

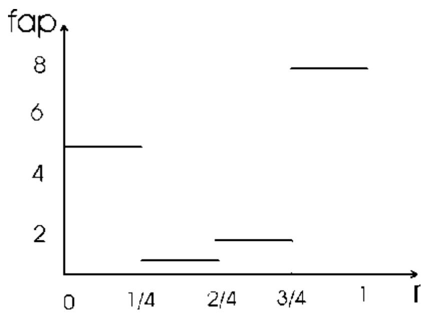
$$f_{ap} = \sum_{j=0}^{n-1} s_j \varphi_{[r_j,r_{j+1}[} = 9\varphi_{[0,1/2[} + 1\varphi_{[1/2,1[}$$



Exemple 2.

j	0	1	2	3
r_j	0	¼	½	¾
s_j	5	1	2	8

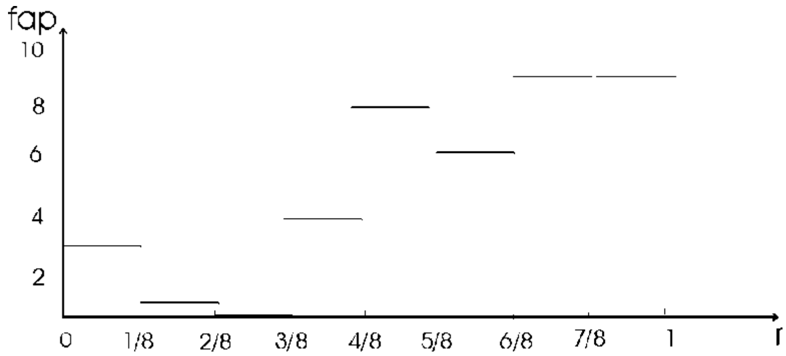
$$f_{ap} = \sum_{j=0}^{n-1} s_j \varphi_{[r_j,r_{j+1}[} = 5\varphi_{[0,1/4[} + 1\varphi_{[1/4,1/2[} + 2\varphi_{[1/2,3/4[} + 8\varphi_{[3/4,1[}$$



Exemple 3.

j	0	1	2	3	4	5	6	7
rj	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8
sj	3	1	0	4	8	6	9	9

$$f_{ap} = 3\varphi_{[0,1/8[} + 1\varphi_{[1/8,2/8[} + 0\varphi_{[2/8,3/8[} + 4\varphi_{[3/8,4/8[} + 8\varphi_{[4/8,5/8[} + 6\varphi_{[5/8,6/8[} + 9\varphi_{[6/8,7/8[} + 9\varphi_{[7/8,1[}$$



Exercice 1.
Écrire la somme et dessiner le graphique de:

rj	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8
sj	8	6	7	3	1	1	2	4

rj	0	1/4	2/4	3/4
sj	3	1	9	7

Exercice 2.
Montrer que $\varphi_{[0,w[}(r) = \varphi_{[0,1[}(r/w) \qquad w > 0$

Montrer que $\varphi_{[u,w[}(r) = \varphi_{[0,1[}(\frac{r-u}{w-u}) \qquad u, w > 0$

L'ondelette de Haar :

 11 Octobre 1885, Budapest - 16 mars 1933, Szeged, Hongrie.
En étudiant la divergence des fonctions continues, il a proposé une base orthonormale : l'ondelette de Haar (1909).

$\psi_{[0,1[} = \varphi_{[0,1/2[} - \varphi_{[1/2,1[}$

$$\psi_{[0,1[} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le r < 1/2 \\ -1 & \text{si } 1/2 \le r < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

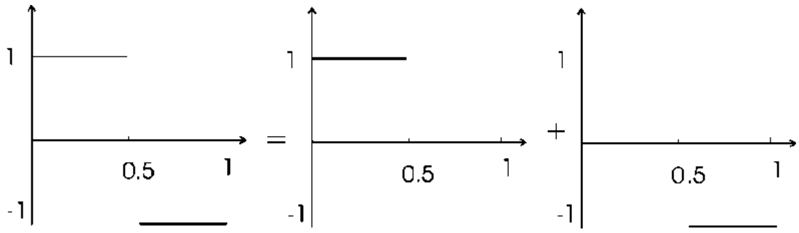


Figure. $\psi_{[0,1[} = \varphi_{[0,1/2[} - \varphi_{[1/2,1[}$

$\varphi_{[0,1[} = \varphi_{[0,1/2[} + \varphi_{[1/2,1[}$
$\psi_{[0,1[} = \varphi_{[0,1/2[} - \varphi_{[1/2,1[}$

En sommant, puis en soustrayant ces deux équations, on obtient :

$[\varphi_{[0,1[} + \psi_{[0,1[}]/2 = \varphi_{[0,1/2[}$
$[\varphi_{[0,1[} - \psi_{[0,1[}]/2 = \varphi_{[1/2,1[}$

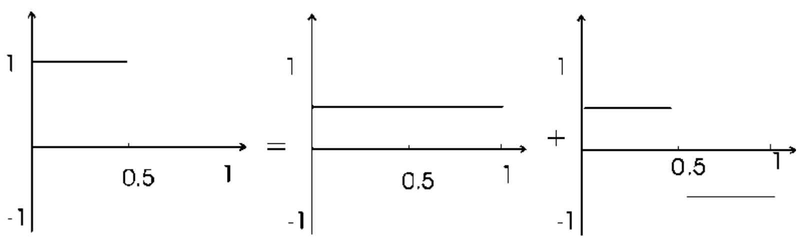


Figure. $\varphi_{[0,1/2[} = [\varphi_{[0,1[} + \psi_{[0,1[}]/2$

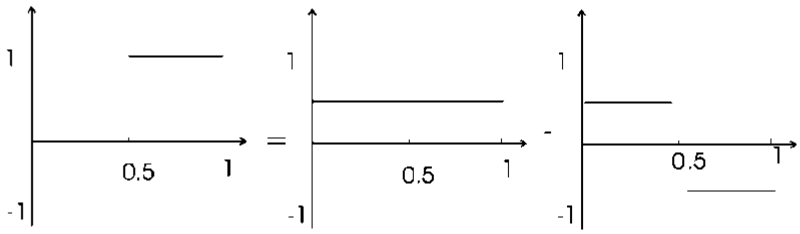


Figure. $\varphi_{[1/2,1[} = \left[\varphi_{[0,1[} - \psi_{[0,1[}\right]/2$

Dans une expression générale :

$$
\begin{aligned}
f_{ap} &= s_0\varphi_{[0,1/2[} + s_1\varphi_{[1/2,1[} \\
&= s_0\left[\varphi_{[0,1[} + \psi_{[0,1[}\right]/2 + s_1\left[\varphi_{[0,1[} - \psi_{[0,1[}\right]/2 \\
&= \frac{s_0 + s_1}{2}\varphi_{[0,1[} + \frac{s_0 - s_1}{2}\psi_{[0,1[}
\end{aligned}
$$

$\dfrac{s_0 + s_1}{2}$ exprime la moyenne dans les amplitudes du signal.

$\dfrac{s_0 - s_1}{2}$ exprime la variation dans les amplitudes du signal.

Exemple 1.

j	0	1
rj	0	1/2
sj	9	1

$$f_{ap} = 9\varphi_{[0,1/2[} + 1\varphi_{[1/2,1[} = \frac{9+1}{2}\varphi_{[0,1[} + \frac{9-1}{2}\psi_{[0,1[} = 5\varphi_{[0,1[} + 4\psi_{[0,1[}$$

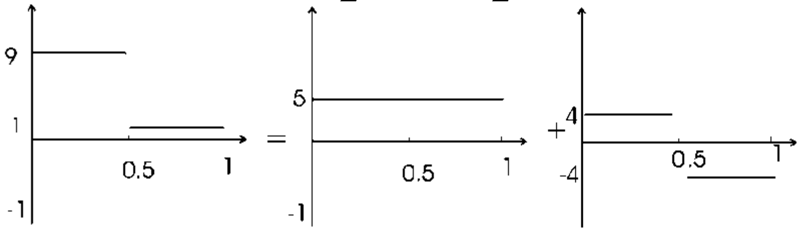


Figure. Exemple d'une transformation en ondelette de base. Ces deux échantillons ont une moyenne de 5 et un saut de -8, soit de 9 à 1.

Déplacement et dilatation de l'onedelette de Haar :
L'ondelette peut débuter à une position u autre que 0, et peut s'étendre sur un intervalle w au lieu de 1 :

$$\psi_{[u,w[}(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \le r < v \\ -1 & \text{si } v \le r < w \end{cases}$$ avec v=u+w/2

Simplifications des écritures :

Par définition : $\Rightarrow \begin{cases} \varphi_{[u,w[} = \varphi_{[u,v[} + \varphi_{[v,w[} \\ \psi_{[u,w[} = \varphi_{[u,v[} - \varphi_{[v,w[} \end{cases}$

En additionnant et en soustrayant on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \varphi_{[u,v[} = \left[\varphi_{[u,w[} + \psi_{[u,w[}\right]/2 \\ \varphi_{[v,w[} = \left[\varphi_{[u,w[} - \psi_{[u,w[}\right]/2 \end{cases}$$

Cette dernière forme est appliquée à un vecteur.

Exemple 2.

j	0	1	2	3
rj	0	1/4	2/4	3/4
sj	5	1	2	8

$$\begin{aligned} f_{a\ p} &= 5\varphi_{[0,1/4[} + 1\varphi_{[1/4,2/4[} + 2\varphi_{[2/4,3/4[} + 8\varphi_{[3/4,4/4[} \\ &= \frac{5+1}{2}\varphi_{[0,2/4[} + \frac{5-1}{2}\psi_{[0,2/4[} + \frac{2+8}{2}\varphi_{[2/4,4/4[} + \frac{2-8}{2}\psi_{[2/4,4/4[} \\ &= \frac{5+1}{2}\varphi_{[0,1/2[} + \frac{5-1}{2}\psi_{[0,1/2[} + \frac{2+8}{2}\varphi_{[1/2,1[} + \frac{2-8}{2}\psi_{[1/2,1[} \\ &= \underbrace{3\varphi_{[0,1/2[} + 2\psi_{[0,1/2[}}_{1^{\text{ère}}\text{ paire}} + \underbrace{5\varphi_{[1/2,1[} - 3\psi_{[1/2,1[}}_{2^{\text{ème}}\text{ paire}} \end{aligned}$$

Exemple 3.

j	0	1	2	3	4	5	6	7
rj	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8
sj	3	1	0	4	8	6	9	9

$$\begin{aligned} f_{a\ p} &= 3\varphi_{[0,1/8[} + 1\varphi_{[1/8,2/8[} + 0\varphi_{[2/8,3/8[} + 4\varphi_{[3/8,4/8[} + 8\varphi_{[4/8,5/8[} + 6\varphi_{[5/8,6/8[} + 9\varphi_{[6/8,7/8[} + 9\varphi_{[7/8,8/8[} \\ &= \frac{3+1}{2}\varphi_{[0,2/8[} + \frac{3-1}{2}\psi_{[0,2/8[} + \\ &\quad \frac{0+4}{2}\varphi_{[2/8,4/8[} + \frac{0-4}{2}\psi_{[2/8,4/8[} + \\ &\quad \frac{8+6}{2}\varphi_{[4/8,6/8[} + \frac{8-6}{2}\psi_{[4/8,6/8[} + \\ &\quad \frac{9+9}{2}\varphi_{[6/8,8/8[} + \frac{9-9}{2}\psi_{[6/8,8/8[} \\ &= 2\varphi_{[0,2/8[} + 1\psi_{[0,2/8[} + 2\varphi_{[2/8,4/8[} - 2\psi_{[2/8,4/8[} + 7\varphi_{[4/8,6/8[} + 1\psi_{[4/8,6/8[} + 9\varphi_{[6/8,8/8]} + 0\psi_{[6/8,8/8]} \end{aligned}$$

Puisque j et rj n'apparaissent pas dans l'expression de la fonction approximée, alors les données de la transformée de Haar peuvent être écrites sous forme de sj seulement.

L'exemple ci-dessus peut alors s'écrire :

j	0	1	2	3	4	5	6	7
rj	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8
sj	3	1	0	4	8	6	9	9

$\vec{S} = (3,1,0,4,8,6,9,9)$

Exercices :

1- Calculer la transformée par l'ondelette de Haar des vecteurs $\vec{S}1 = (2,8)$, $\vec{S}2 = (2,4,8,6)$ et $\vec{S}3 = (8,6,7,3,1,1,2,4)$

2- Montrer que pour une fonction de 4 échantillons (s0,s1,s2,s3), la moyenne des moyennes des deux paires consécutives est la moyenne des quatre échantillons.

La transformée de Haar rapide et ordonnée

Le calcul de la trasnformée se fait par étape, et le résultat est classé dans l'ordre selon les étapes.

Exemple : $\vec{S} = (3,1,0,4,8,6,9,9)$

Étape 1.

On fait les paires des sommations :

$$a_1 = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{8+6}{2}, \frac{9+9}{2}\right) = (2,2,7,9)$$

Puis on fait les paires des différences :

$$d_1 = \left(\frac{3-1}{2}, \frac{0-4}{2}, \frac{8-6}{2}, \frac{9-9}{2}\right) = (1,-2,1,0)$$

Étape 2 :

On garde d1 et on fait la transformation de a1 :

On fait les paires des sommations :

$$a_2 = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{7+9}{2}\right) = (2,8)$$

Puis on fait les paires des différences :

$$d_2 = \left(\frac{2-2}{2}, \frac{7-9}{2}\right) = (0,-1)$$

Étape 3 :

On garde d2 et on fait la transformation de a2 :

On fait la paire de sommation :

$$a_3 = \left(\frac{2+8}{2}\right) = (5)$$

Puis on fait la paire de différence :

$$d_3 = \left(\frac{2-8}{2}\right) = (-3)$$

Résultat de la transformation : $f_{ap}=(a3;d3;d2;d1)=(5;-3;0,-1;1,-2,1,0)$
Qui s'écrit aussi sous la forme :

$$\begin{aligned}
f_{ap} &= 1\psi_{[0,2/8[} - 2\psi_{[2/8,4/8[} + 1\psi_{[4/8,6/8[} + 0\psi_{[6/8,8/8[} && \text{Étape 1}\\
&+ 0\psi_{[0,4/8[} - 1\psi_{[4/8,8/8[} && \text{Étape 2}\\
&- 3\psi_{[0,8/8[} + 5\varphi_{[0,8/8[} && \text{Étape 3}
\end{aligned}$$

Qui est une représentation de f_{ap} :

$$f_{ap} = 3\varphi_{[0,1/8[} + 1\varphi_{[1/8,2/8[} + 0\varphi_{[2/8,3/8[} + 4\varphi_{[3/8,4/8[} + 8\varphi_{[4/8,5/8[} + 6\varphi_{[5/8,6/8[} + 9\varphi_{[6/8,7/8[} + 9\varphi_{[7/8,8/8[}$$

La transformée de Haar rapide et sur place (In-place fast Haar wavelet transform)
La transformée de Haar rapide et ordonnée nécessite la connaissance de toutes les données avant de procéder la transformation, car tous les éléments sont utilisés dans le calcul 2 par 2.
Mais il est possible de faire le calcul avec les éléments déjà disponibles, soient les additions et les soustractions des paires successives : il faut alors identifier les éléments provenant des additions (a) et des soustractions (d).

Exemple 1:

$$\vec{S} = (s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, ...s_{2k}, s_{2k+1}, ...)$$

Étape 1 :

$$f_{ap}^1 = \left(\frac{s_0+s_1}{2}, \frac{s_0-s_1}{2}, \frac{s_2+s_3}{2}, \frac{s_2-s_3}{2}, ...\right)$$
$$= \left(\mathrm{a}_1^1, \mathrm{d}_1^1, \mathrm{a}_1^2, \mathrm{d}_1^2, ...\right)$$

Étape 2 :

$$f_{ap}^2 = \left(\frac{a_1^1+a_1^2}{2}, d_1^1, \frac{a_1^1-a_1^2}{2}, d_1^2, \ . \ . \ .\right)$$
$$= \left(\mathrm{a}_2^1, \mathrm{d}_1^1, \mathrm{d}_2^1, \mathrm{d}_1^2, \ . \ . \ \right) \ . \ . \ .$$

Par définition :
- Les étapes de la <u>décomposition</u> ou de la <u>transformation</u> sont appelés <u>niveaux</u> de décomposition ou de transformation.
- Les éléments *a* de la décomposition forment les <u>coefficients des approximations</u>.
- Les éléments *d* de la décomposition forment les <u>coefficeints des détails</u>.
- Des coefficients des approximations et des détails on peut retrouver le signal de départ : c'est l'opération de la <u>reconstruction</u> du signal ou la <u>transformée inverse</u>.
- Les éléments de la décomposition sont appelés *C*, pour coefficients.

Exemple 2:
Faire la décomposition avec la méthode rapide et sur place :

$$\vec{S} = (3,1,0,4,8,6,9,9)$$

$$C^1 = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{3-1}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{0-4}{2}, \frac{8+6}{2}, \frac{8-6}{2}, \frac{9+9}{2}, \frac{9-9}{2}\right) = (\underline{2},1,\underline{2},-2,\underline{7},1,\underline{9},0$$

$$C^2 = \left(\frac{2+2}{2},1,\frac{2-2}{2},-2,\frac{7+9}{2},1,\frac{7-9}{2},0\right) = (\underline{2},1,0,-2,\underline{8},1,-1,0)$$

$$C^3 = \left(\frac{2+8}{2},1,0,-2,\frac{2-8}{2},1,-1,0\right) = (\underline{5},1,0,-2-3,1,-1,0)$$

Peu importe la procédure, on doit reconnaître les sommes (φ) et les différences (ψ) pour pouvoir reconstruire le signal.

Exercice 1.
Calculer la transformée ordonnée de S=(8,6,7,3,1,1,2,4).

Exercice 2.
Calculer la transformée sur place de S=(8,6,7,3,1,1,2,4).

La transformée inverse de l'ondelette de Haar, ou reconstruction du signal
Que ce soit avec la transformation de l'ondelette de Haar ordonnée ou sur place, l'essentiel est de pouvoir classer les coefficients des approximations et des détails selon la position des paires et selon les niveaux de décomposition pour un éventuel filtrage et pour la reconstruction.

Exemple.
Reconstruction d'une transformation ordonnée.
S=(3,1,0,4,8,6,9,9)
C^3=(5;-3;0,-1;1,-2,1,0) = (a3;d3;d2;d1)

À partir des coefficients d'approximation et de détail, il est possible de retrouver le signal de départ en reconstituant le signal étape par étape et en se basant sur les sommes et les différences.
Exemple déduit du niveau 3 :

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = a3 \\ \dfrac{x-y}{2} = d3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x + y} = 2a3 \\ \mathrm{x - y} = 2d3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{2x = 2(a3 + d3)} \\ \mathrm{2y = 2(a3 - d3)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x = a3 + d3} \\ \mathrm{y = a3 - d3} \end{cases}$$

On retrouve C^2 :
C^3 = (a3+d3,a3-d3;d2;d1) = (5-3;5+3;0,-1;1,-2,1,0) = (2,8;0,-1;1,-2,1,0) = (a2;d2;d1)

On remonte à C^1, toujours en calculant les éléments x et y à partir des coefficients d'approximation et de détail du niveau concerné tout en <u>respectant l'ordre des paires d'éléments</u> :
C^1 = (a2+d2,a2-d2;d1) = (2+0,2-0,8-1,8+1;1,-2,1,0) = (2,2,7,9;1,-2,1,0) = (a1;d1)

Finalement on reconstruit C^1 pour arriver au vecteur de départ S:
C^1 = (a1+d1,a1-d1;d1) = (2+1,2-1,2-2,2+2,7+1,7-1,9+0,9-0) = (3,1,0,4,8,6,9,9)

Décomposition et reconstruction, ou transformation et transformation inverse, à l'aide de filtres

Il est possible de développer ses propres programmes de calculs de décomposition et de reconstruction en ondelettes, comme il est possible d'utiliser des outils déjà existants.

Filtres de décomposition

Nous avons jusqu'à présent utilisé des calculs algébriques dans la décomposition et la reconstruction des signaux. Nous pouvons cependant procéder les mêmes calculs avec des filtres, des opérations matricielles et des opérations de convolution. Les calculs par convolution sont les plus utilisés.

Exemple :
Trouves les coefficients d'approximation et de détail du vecteur S = (s_1,s_2).
Méthode usuelle :

$$a_1 = \frac{s_1 + s_2}{2} \qquad \text{et} \qquad d_1 = \frac{s_1 - s_2}{2}$$

Méhode par filtres :
Le filtre de la sommation est LD = [1 1]/2. <u>LD est le filtre basse fréquence de décomposition</u> (LD = Low Decomposition).
Le filtre de la différence est HD = [1 -1]/2. <u>HD est le filtre haute fréquence de décomposition</u> (HD = High Decomposition).
La régularité du signal s'observe à basse fréquence.
Les fluctuations du signal (bruit) s'observe à haute fréquence.

$$a_1 = S.LD^T = (s_1 \quad s_2).\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}/2 = \frac{s_1 + s_2}{2}$$

$$d_1 = S.HD^T = (s_1 \quad s_2).\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}/2 = \frac{s_1 - s_2}{2}$$

LD^T et HD^T sont les transposées de LD et HD.
On peut comme précédemment décomposer un signal en ses coefficients d'approximation et de détail avec les sommations et les différences, on peut le faire aussi matriciellement avec les filtres LD et HD, en produisant une matrice filtre H:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}/2$$

Ainsi les coefficients C^1 sont obtenus:

$$C^1 = S.H = (s_1 \quad s_2).\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}/2 = \begin{pmatrix} \frac{s_1 + s_2}{2} & \frac{s_1 - s_2}{2} \end{pmatrix}$$

Exemple:
a- Décomposer par la méthode algébrique (sommation et différence) au niveau 1 le vecteur $S = (0 \quad 3 \quad 1 \quad 5)$. Noter que nous avons omis d'insérer les virgules entre les éléments de S. <u>À partir de maintenant, nous allons toujours faire toutes les sommations d'abord, suivies de toutes les différences pour obtenir en première moitié du vecteur les coefficients d'approximation, et en deuxième moitié les coefficients de détail</u>.

$$C = (0+3 \quad 1+5 \quad 0-3 \quad 1-5)/2 = (3 \quad 6 \quad -3 \quad -4)/2$$

b- Décomposer par la méthode des filtres avec calcul matriciel et au niveau 1 le vecteur $S = (0 \quad 3 \quad 1 \quad 5)$.

Puisque nous avons 4 éléments dans le vecteur à décomposer, il nous faut une matrice filtre H de 4 x 4 qui agit sur les éléments de S par paire pour les sommations et pour les différences.

$$C = (0 \quad 3 \quad 1 \quad 5).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}/2 = (0+3 \quad 1+5 \quad 0-3 \quad 1-5)/2 = (3 \quad 6 \quad -3 \quad -4)/2$$

c- Décomposer par la méthode de la convolution au niveau 1 le vecteur $S = (0 \quad 3 \quad 1 \quad 5)$.
Les filtres de convolution sont LD = [1 1]/2 et HD = [1 -1]/2. Faisant d'abord la convolution de S avec LD suivie de la convolution de S avec HD, on obtient : C = ([0   0+3   3+1   1+5   5]   [-0   0-3   3-1   1-5])/2. Les valeurs dans le premier crochet correspondent aux coefficients d'approximation, et celles du second crochet correspondent aux coefficients de détail. Une seconde opération est nécessaire dans cette procédure: c'est la décimation. Il s,agit de ne retenir que les éléments de rand pair et d'ignorer les autres:
C = ([0+3   1+5]   [0-3   1-5])/2 = ([3   6]   [-3   -4])/2 = (3   6   -3   -4])/2.

Remarque: Même si la procédure par la convolution nécessite 2 opérations, convolution-décimation, elle est la plus rapide et la plus utilisée. La méthode algébrique nécessite des boucles et un tri des éléments. La méthode matriciel nécessite la création et le maintien en mémoire de la matrice des filtres.

Exercice 1.
a- Écrire le filtre H pour décomposer un vecteur de 8 éléments.
b- Décomposer aux niveaux 1, 2 et 3 le vecteur S = (3,1,0,4,8,6,9,9).

Filtres de reconstruction
Nous avons démontré ci-haut la reconstruction par l'approche algébrique:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = a \\ \dfrac{x-y}{2} = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x + y} = 2a \\ \mathrm{x - y} = 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{2x = 2(a + d)} \\ \mathrm{2y = 2(a - d)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x = a + d} \\ \mathrm{y = a - d} \end{cases}$$

il apparaît donc que:

$$(a \quad d).\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (a + d \quad a\text{-}d) = (x \quad y)$$

soit

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et les filtres de reconstruction basse fréquence LR et de haure fréquence HR sont donnés par: LR = [1   1]; HR = [1   -1];

Exercice 2:
a- Établir les filtres de reconstruction aux niveaux 3, 2 et 1.