Transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform: FFT)

[Algorithme de James W. Cooley et John W Tukey, 1965]

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n)\exp(-i2\pi kn/N) \quad \text{et} \quad g(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} G(k)\exp(i2\pi kn/N)$$

Écrire $e^{-i2\pi kn/N} = \left(e^{-i2\pi/N}\right)^{kn} = E^{kn}$

Pour N = 2, nous avons

G(0) = g(0)$E^{k=0,n=0}$ + g(1)$E^{k=0,n=1}$

G(1) = g(0)$E^{k=1,n=0}$ + g(1)$E^{k=1,n=1}$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} G(0) \\ G(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^{0.0} & E^{0.1} \\ E^{1.0} & E^{1.1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \end{bmatrix}$$

Donc pour N = 2:

$$\begin{bmatrix} E^{0.0} & E^{0.1} \\ E^{1.0} & E^{1.1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(e^{-i2\pi/2}\right)^{0.0} & \left(e^{-i2\pi/2}\right)^{0.1} \\ \left(e^{-i2\pi/2}\right)^{1.0} & \left(e^{-i2\pi/2}\right)^{1.1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{0.0} & (-1)^{0.1} \\ (-1)^{1.0} & (-1)^{1.1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} G(0) \\ G(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow E^0 = 1 \text{ et } E^1 = -1.$$

Pour N = 2, G(0) = g(0) + g(1), et G(1) = g(0) - g(1).

Pour N = 4. Dans la matrice E, n varie horizontalement, et k varie verticalement:

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} G(0) \\ G(1) \\ G(2) \\ G(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^{k=0,n=0} & E^{k=0,n=1} & E^{k=0,n=2} & E^{k=0,n=3} \\ E^{k=1,n=0} & E^{k=1,n=1} & E^{k=1,n=2} & E^{k=1,n=3} \\ E^{k=2,n=0} & E^{k=2,n=1} & E^{k=2,n=2} & E^{k=2,n=3} \\ E^{k=3,n=0} & E^{k=3,n=1} & E^{k=3,n=2} & E^{k=3,n=3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix}$$

et en multipliant k et n des éléments de *E*.

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} G(0) \\ G(1) \\ G(2) \\ G(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^0 & E^0 & E^0 & E^0 \\ E^0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ E^0 & E^2 & E^4 & E^6 \\ E^0 & E^3 & E^6 & E^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix}$$

Calculons les éléments de la matrice E toujours pour N = 4:

E = exp(-i2π/4) = cos(π/2) - isin(π/2) = -i

$$\begin{bmatrix} E^0 & E^0 & E^0 & E^0 \\ E^0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ E^0 & E^2 & E^4 & E^6 \\ E^0 & E^3 & E^6 & E^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-i)^0 & (-i)^0 & (-i)^0 & (-i)^0 \\ (-i)^0 & (-i)^1 & (-i)^2 & (-i)^3 \\ (-i)^0 & (-i)^2 & (-i)^4 & (-i)^6 \\ (-i)^0 & (-i)^3 & (-i)^6 & (-i)^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$$

en remplaçant 1 par E^0 et -i par E^1 (ceci provient de la périodicité de $\exp(-i2\pi/4)^{kn} = \exp(-i\pi/2)^{kn}$):

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^0 & E^0 & E^0 & E^0 \\ E^0 & E^1 & -E^0 & -E^1 \\ E^0 & -E^0 & E^0 & -E^0 \\ E^0 & -E^1 & -E^0 & E^1 \end{bmatrix}$$

En factorisant la matrice E et en réajustant l'ordre des G(k):

$$\begin{bmatrix} G(0) \\ G(2) \\ G(1) \\ G(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & E^0 & 0 & 0 \\ 1 & -E^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & E^1 \\ 0 & 0 & 1 & -E^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & E^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & E^0 \\ 1 & 0 & -E^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -E^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix}$$

En dissociant les calculs selon des niveaux (ou étages):

Niveau 1:

$$\begin{bmatrix} g_1(0) \\ g_1(1) \\ g_1(2) \\ g_1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & E^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & E^0 \\ 1 & 0 & -E^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -E^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix}$$

Niveau 2:

$$\begin{bmatrix} g_2(0) \\ g_2(1) \\ g_2(2) \\ g_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & E^0 & 0 & 0 \\ 1 & -E^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & E^1 \\ 0 & 0 & 1 & -E^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(0) \\ g_1(1) \\ g_1(2) \\ g_1(3) \end{bmatrix}$$

On opère un inversement de bit:

$$\begin{bmatrix} G(0) \\ G(1) \\ G(2) \\ G(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2(0) \\ g_2(2) \\ g_2(1) \\ g_2(3) \end{bmatrix}$$

La séquence de calcul de l'algorithme se fait par paires d'équations et par niveau:

Niveau 1:

$g_1(0) = g(0) + E^0 g(2)$

$g_1(2) = g(0) - E^0 g(2)$

$g_1(1) = g(1) + E^0 g(3)$

$g_1(3) = g(1) - E^0 g(3)$

Niveau 2:

$g_2(0) = g_1(0) + E^0 g_1(1)$

$g_2(1) = g_1(0) - E^0 g_1(1)$

$g_2(2) = g_1(2) + E^1 g_1(3)$

$g_2(3) = g_1(2) - E^1 g_1(3)$

En réécrivant l'inversement de bit en binaire plutôt qu'en décimal:

$$\begin{bmatrix} G(00) \\ G(01) \\ G(10) \\ G(11) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2(00) \\ g_2(10) \\ g_2(01) \\ g_2(11) \end{bmatrix}$$

On note que les indices entre parenthèses dans G et g_2 sont miroirs: "bit reversal".

La différence de calcul en nombre de multiplications entre TFD et FFT, avec N une puissance de 2: $N = 2^{\nu} \Rightarrow \nu = \log_2(N)$:

N	TFD	FFT
4	16	4
64	4096	192
1024	1048675	5120
32768	1073741824	245760

La transformée de Fourier discrète en 2D:

La transformée de Fourier discrète en 2D est équivalente à la TFD à 1D appliquée sur les colonnes, puis la TFD est appliquée une seconde fois sur les lignes de la matrice résultante.