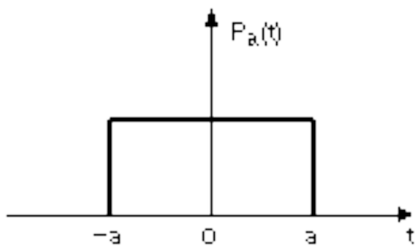
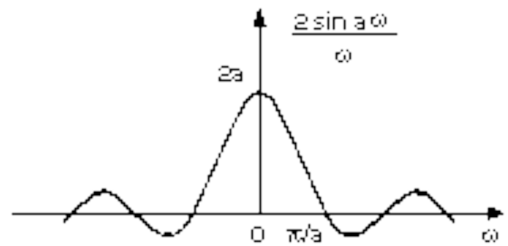
Rappels de la T.F. importants

- Fonction de pas
- Dirac
- Peigne de Dirac

Transformée de Fourier

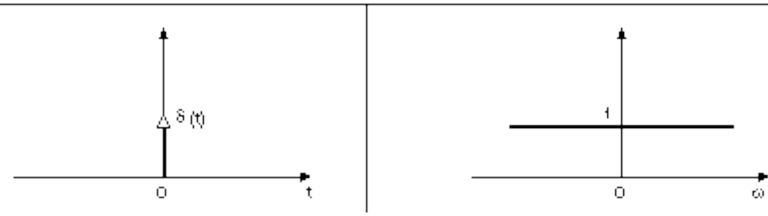




Transformée de Fourier

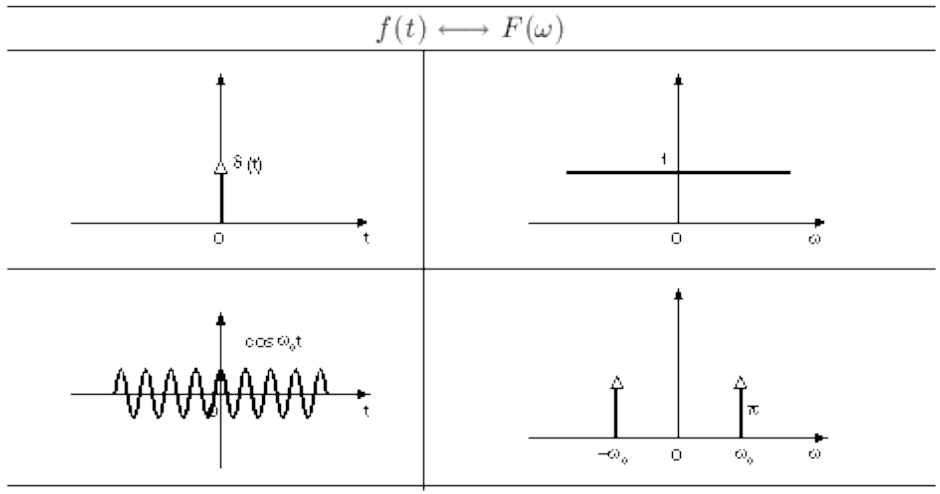
Transforms of singularity functions

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$



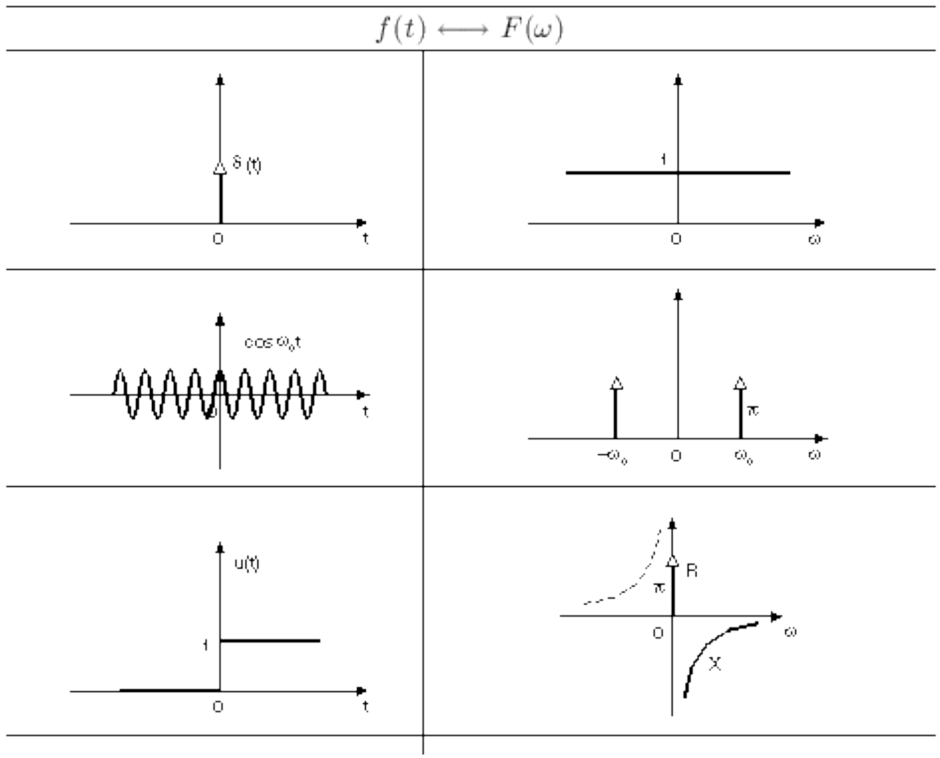
Transformée de Fourier

Transforms of singularity functions

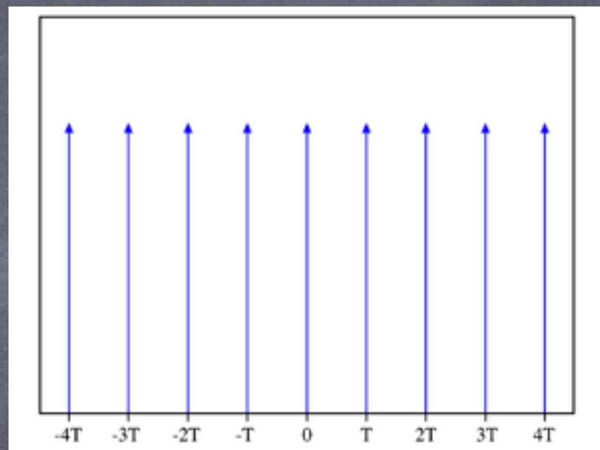


Transformée de Fourier

Transforms of singularity functions



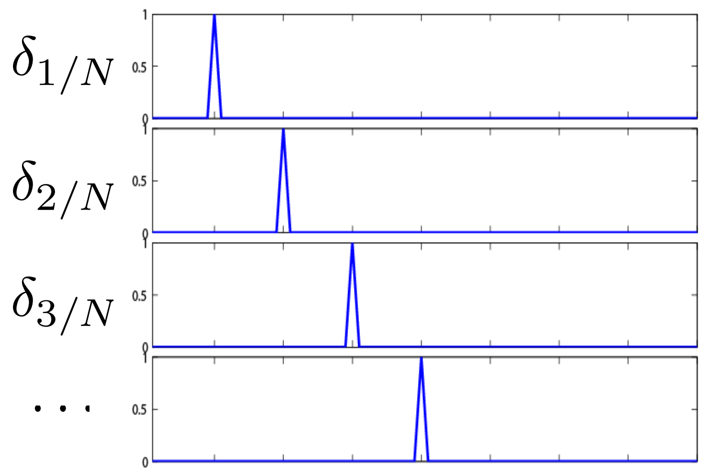
Dirac et peigne de Dirac



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi f n T}.$$

Sampling

Uniform sampling: $f[i] = f(i/N) = \langle f, \varphi_i \rangle$ where $\varphi_i = \delta_{i/N}$ Dirac.

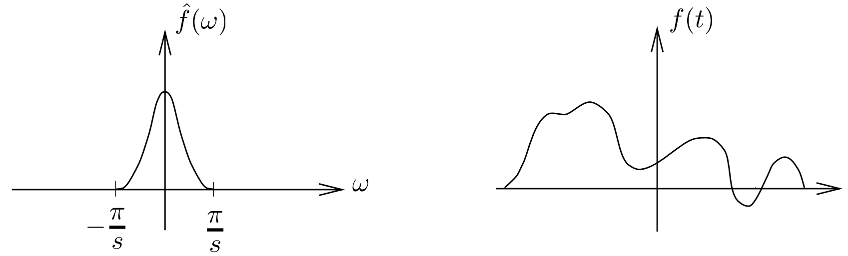


pointwise sampling

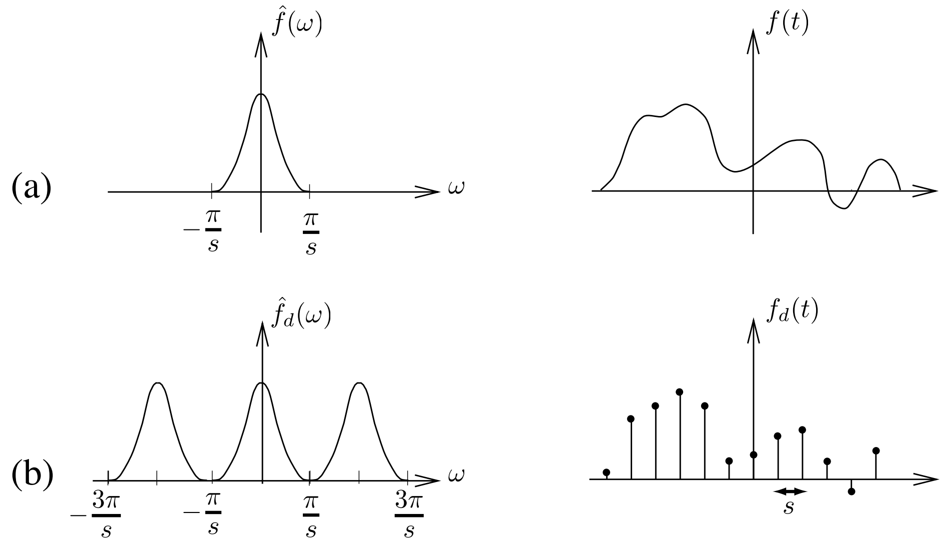
Linear reconstruction formula: $f(t) = \sum_i f[i] h(t - i/N)$ where $h(t) = \frac{\sin(\pi N t)}{\pi N t}$

Échantillonnage

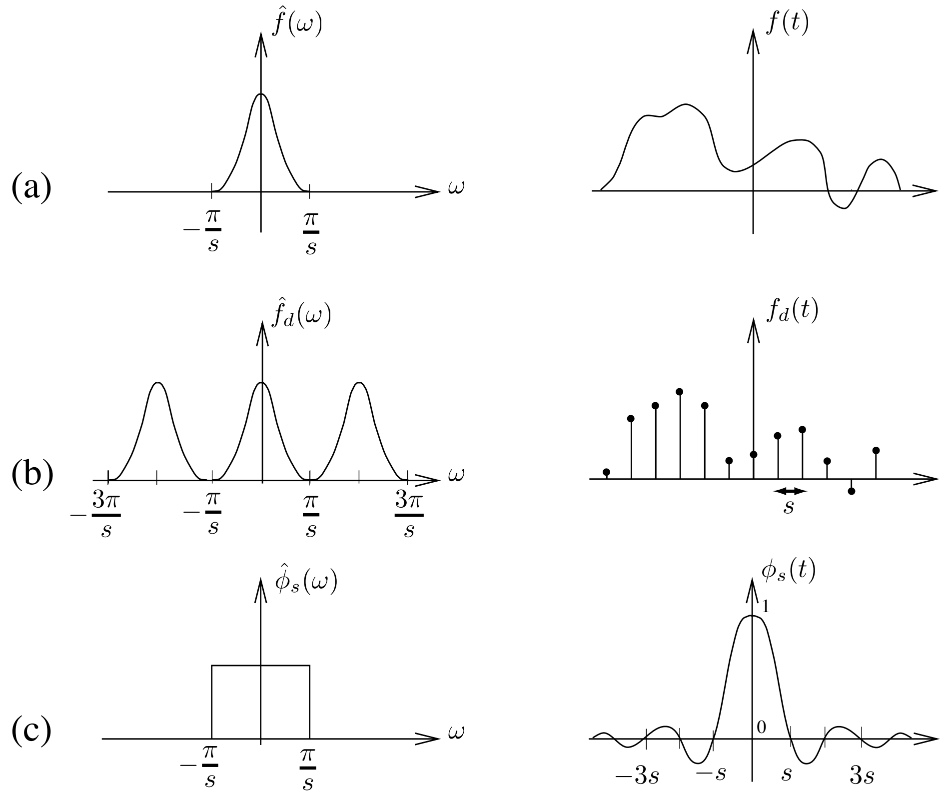
(a)



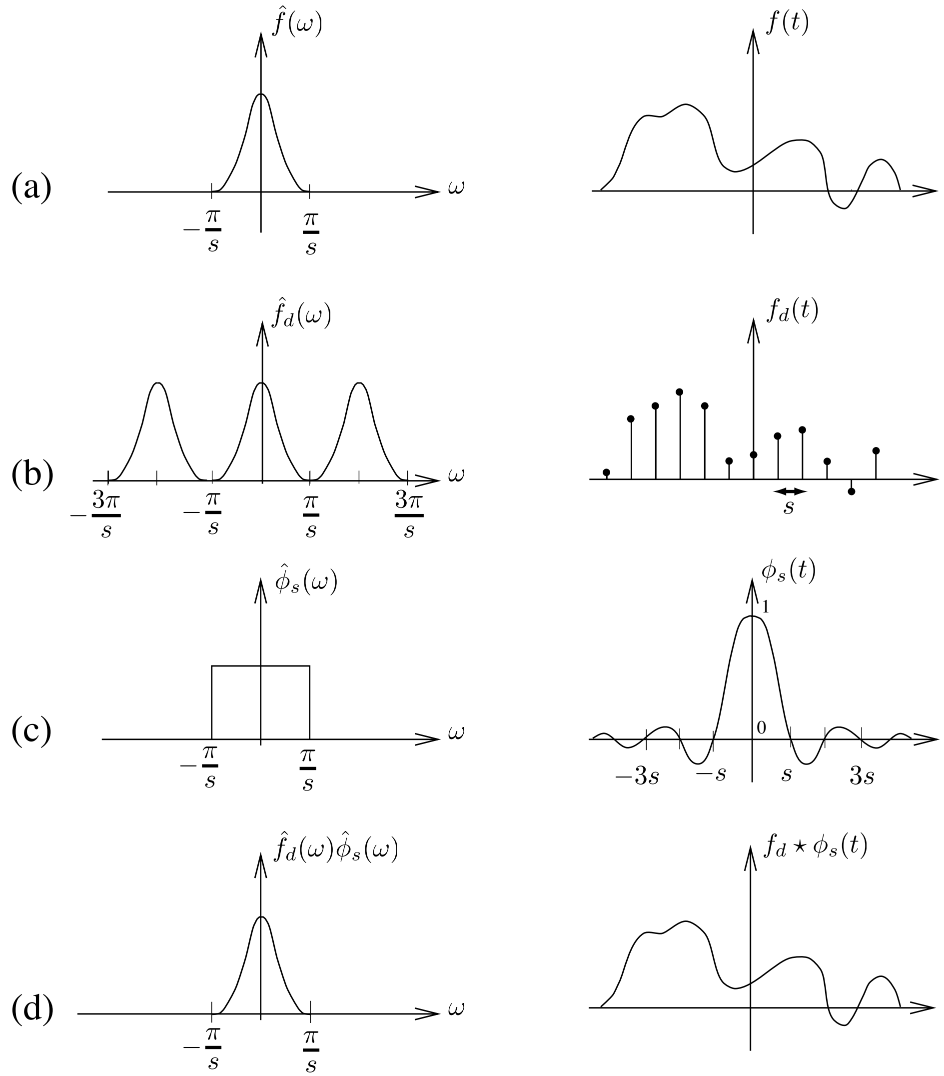
Échantillonnage



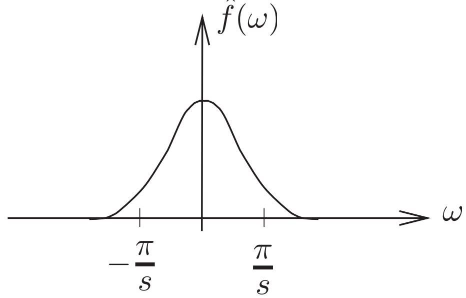
Échantillonnage

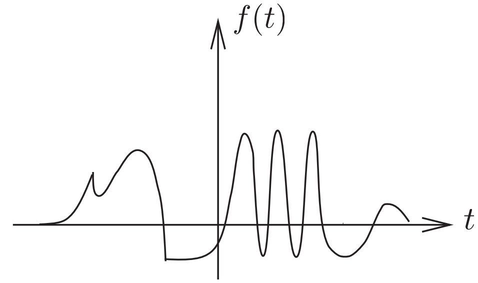


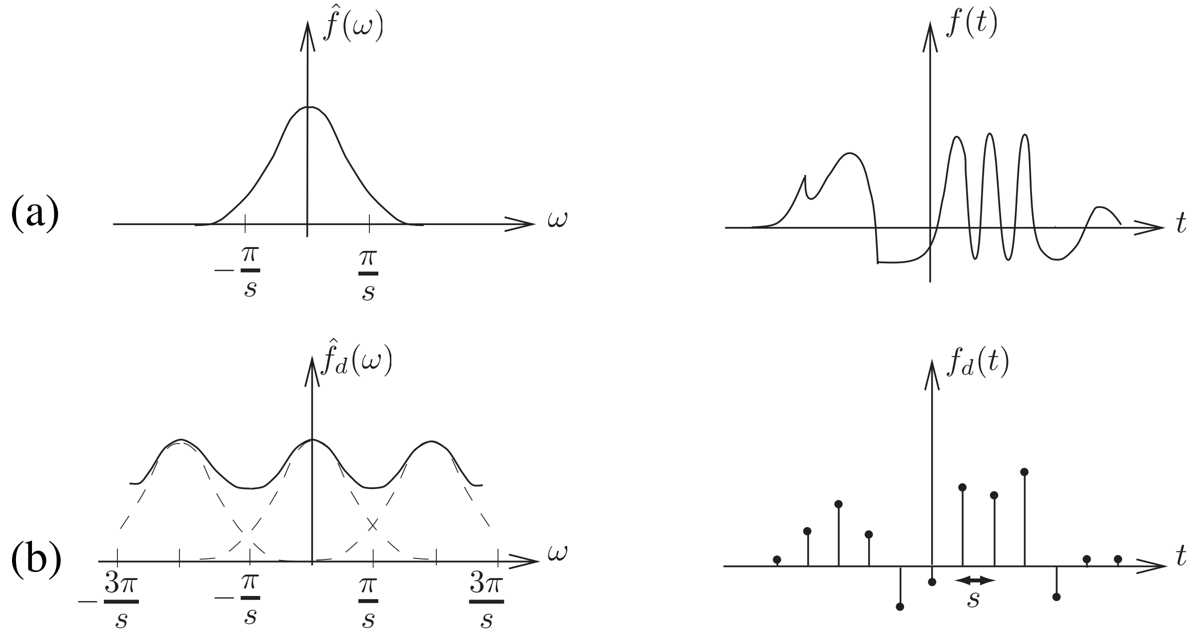
Échantillonnage



(a)



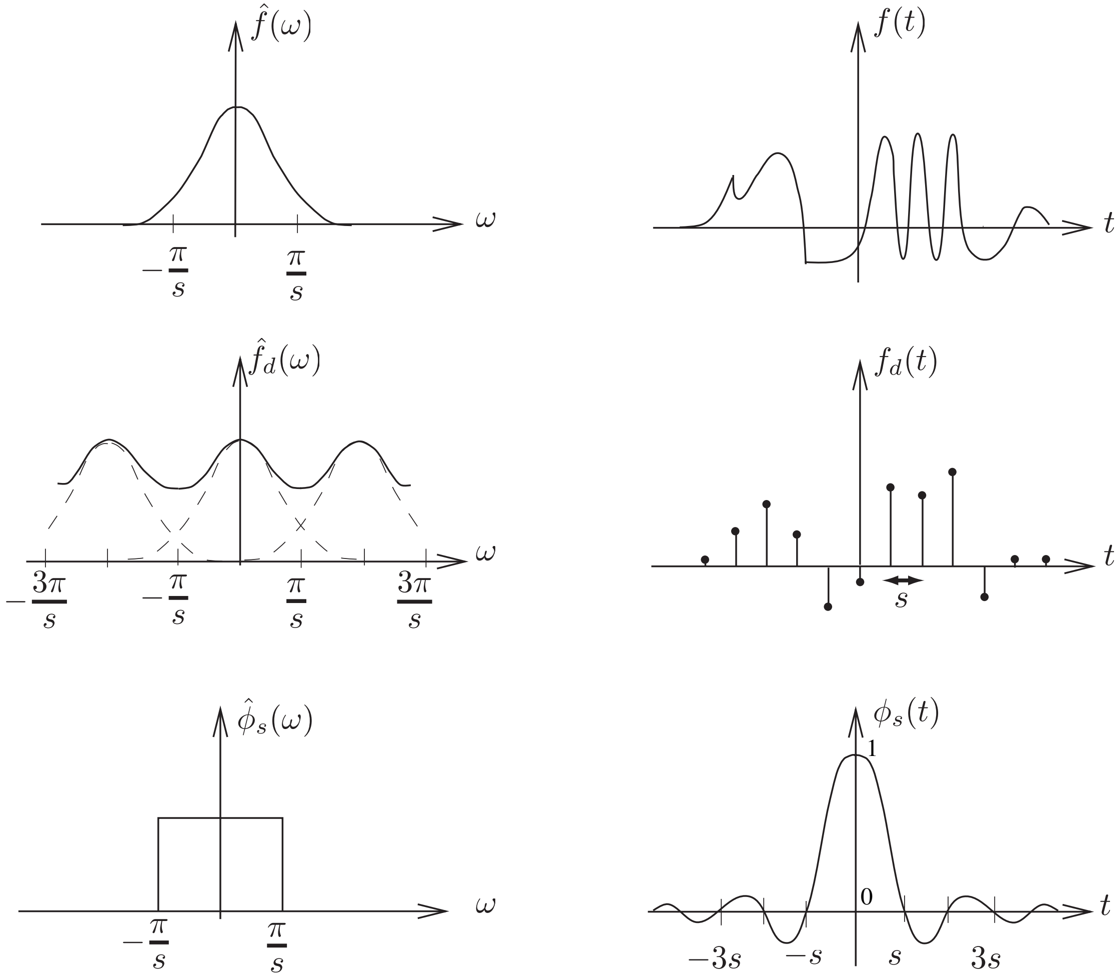



(a)
$\hat{f}(\omega)$
ω
$-\frac{\pi}{s}$
$\frac{\pi}{s}$
$f(t)$
t
(b)
$\hat{f}_d(\omega)$
ω
$-\frac{3\pi}{s}$
$-\frac{\pi}{s}$
$\frac{\pi}{s}$
$\frac{3\pi}{s}$
$f_d(t)$
t
s

(a)

(b)

(c)



$\hat{f}(\omega)$
ω
$-\frac{\pi}{s}$
$\frac{\pi}{s}$
$f(t)$
t
$\hat{f}_d(\omega)$
$-\frac{3\pi}{s}$
$\frac{3\pi}{s}$
$f_d(t)$
s
$\hat{\phi}_s(\omega)$
$\phi_s(t)$
1
0
$-3s$
$-s$
$3s$

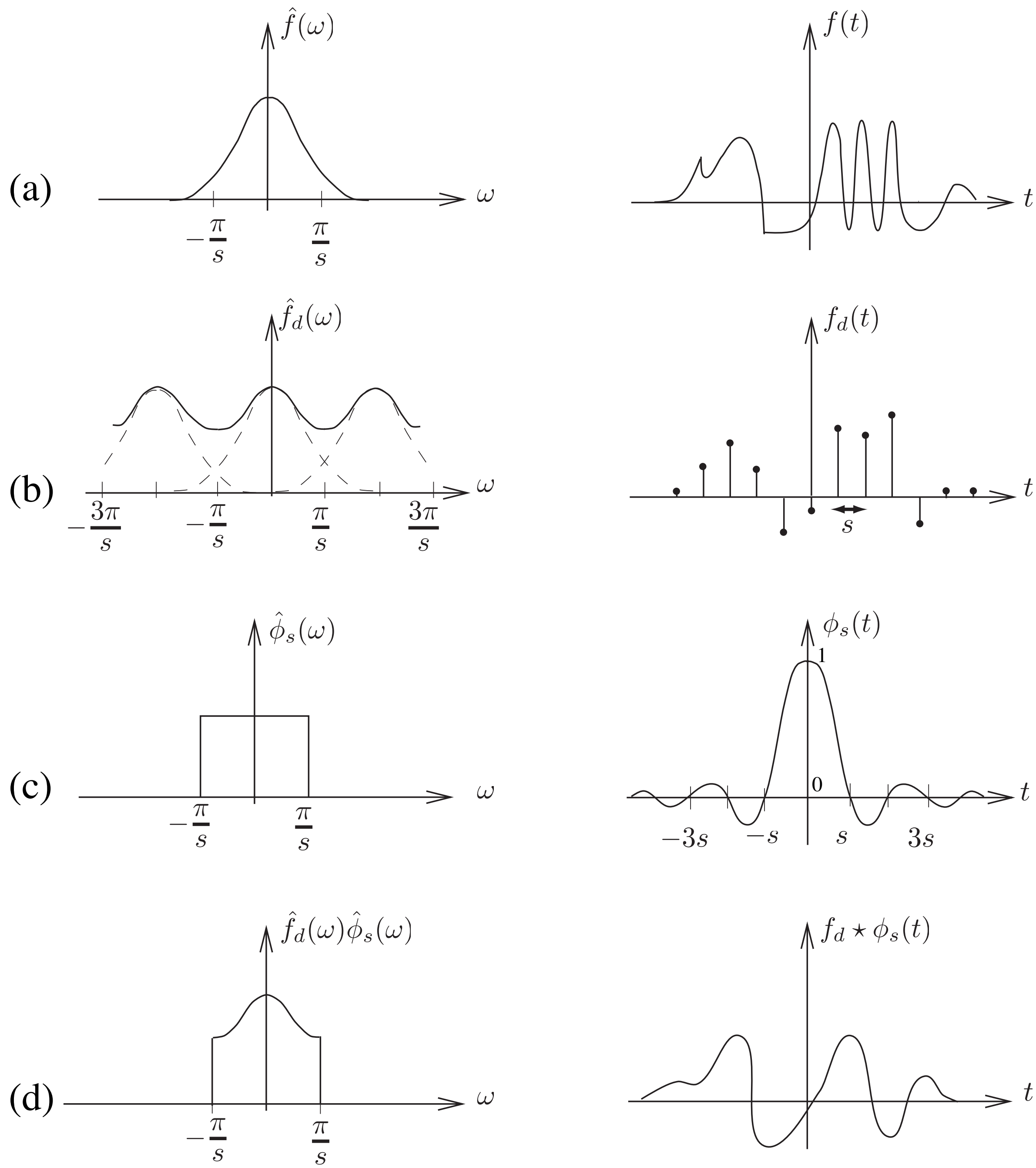


Fig. 3.2. A Wavelet Tour of Signal Processing, 3rd ed. (a): Signal f and its Fourier transform $\hat{f}$. (b): Aliasing produced by an overlapping of $\hat{f}(\omega - 2k\pi/s)$ for different k, shown in dashed lines. (c): Ideal low-pass filter. (d): The filtering of (b) with (c) creates a low-frequency signal that is different from f.

Thm d'échantillonnage

- La bande fréquences (f_b = 1/ts) qui délimitent le signal dépend de l'échantillonnage (ts)
  linspace(-2pi, 2pi, 1000) vs linspace(-2pi, 2pi, 100)
- Le signal doit être contenu dans le monde des fréquences entre -f_b/2 et f_b/2
  (piece-regular entre 0 et 1 avec 1024 points a son contenu fréquenciel entre -512 et 512)

Thm d'échantillonnage

- Donc, tant que le signal est échantillonné à f_max*2 (avec au moins f_max*2 + 1 points), il n'y aura pas de problèmes de recouvrement dans Fourier (f_max est la fréquence max du signal à reconstruire… qu'on ne sait pas en pratique)
- Cette fréquence critique s'appelle la fréquence de Shannon (europe) ou Nyquist (amérique)
f_nyquist = 2 * f_max

Thm d'échantillonnage

- Si Nyquist/Shannon non-respecté, on a du repliement dans Fourier. Les hautes fréquences du signal se replient et viennent contaminer les basses fréquences

  (démo07, si on a un signal avec des cos à 3 et 8 Hz dedans mais qu'on échantillonne à 5Hz, les hautes fréquences de 8Hz se replient à 2Hz dans Fourier)

Problème d'échantillonnage

- Repliement
- Artéfactes de géométriques
- Bruit
- Interférences

Solutions TP3

- Convolution
- Théorème de convolution
- Conservation d'énergie
- Filtrage passe-bas
- Zero-padding (interpolation linéaire)
- Échantillonnage

Problème d'échantillonnage

- Repliement
- Artéfactes de géométriques
- Bruit
- Interférences