Le théorème d'échantillonnage.

Une fonction analytique et continue peut être représentée par des échantillons en vue d'un traitement numérique: les échantillons devraient représenter la fonction analytique de départ, c'est à dire, à partir des échantillons, on est en mesure de reproduire la fonction.

Nous avons d'abord besoin des résultats de convolution impliquant la fonction Dirac.

La convolution avec la fonction δ de Dirac

g(t) ¤ δ(t) = g(t)

$$g(t)\otimes\delta(t)=\delta(t)\otimes g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(s)g(t-s)ds=g(t)$$

g(t) ¤ δ(t-T) = g(t-T)

$$g(t)\otimes\delta(t-T)=\delta(t-T)\otimes g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(s-T)g(t-s)ds=g(t-T)$$

$$G(w)\otimes\delta(w-w0)=G(w-w0)$$

Nous avons donc déjà vu les propriétés de la fonction δ:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-a)dx=f(a)$$

et le peigne de Dirac ou train d'impulsions:

$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nt_s)$ avec T la période et ts le temps d'échantillonnage.

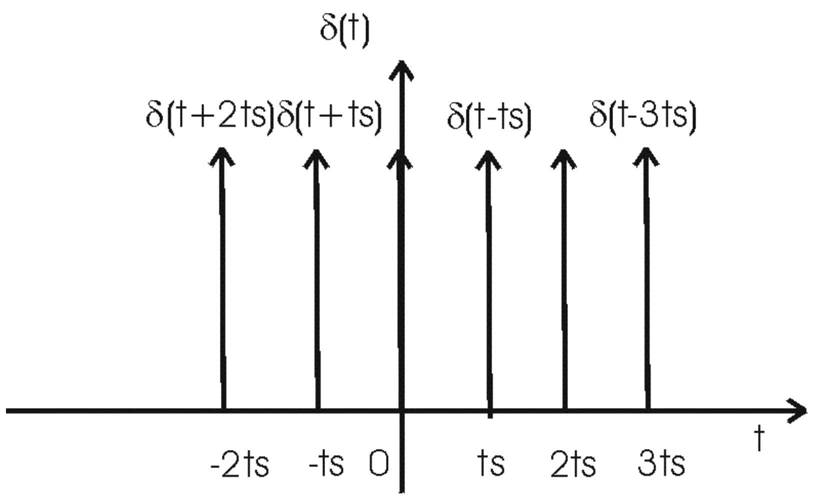

Figure. Peigne de Dirac ou train d'impulsions.

L'échantillonnage d'une fonction x(t) est une procédure mathématique où cette fonction est multipliée par un train d'impulsions.

$$x(t)\delta_T(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nt_s)$$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nt_s)\delta(t-nt_s)$$

où $x_s(t)$ est la fonction échantillonnée.

Exemple 1.

D'abord, on ne peut tracer une fonction numériquement (par ordinateur) si elle n'est pas échantillonnée. L'échantillonnage sert donc à cette fin, c'est à dire pour le traitement numérique de fonctions ou d'images.

Nous traçons ici une fonction sinus échantillonnée finement pour être représentée comme fonction analytique, ensuite nous l'échantillonnons avec un train d'impulsions.

```
t=-2*pi:0.01:2*pi; f0=0.5; y=2*sin(2*pi*f0*t);ts=20;ii=1:ts:length(t);t0=t(ii);[t,d]=delta(t,t0);
figure;plot(t,y,'b-',t,d,'r-','linewidth',2); set(gca,'xcolor',[0 0 0],'ycolor',[0 0
0],'FontSize',16);set(gcf,'Color',[1 1 1],'Position',[280 200 680
500],'InvertHardCopy','off');xlabel('t');ylabel('Amplitude'); legend('y(t)','\delta(t-nt_s)');axis([-
2*pi 2*pi -2.2 2.2]);  cd('C:\mohamed\scc\etud\cours\imn359\IMN359-aut2007'); print -
dmeta convol_echant1;
ys=y.*d;t2=t;t2(find(ys==0))=[];ys(find(ys==0))=[];figure;plot(t2,ys,'bo-','linewidth',2);
set(gca,'xcolor',[0 0 0],'ycolor',[0 0 0],'FontSize',16);set(gcf,'Color',[1 1 1],'Position',[280 200
680 500],'InvertHardCopy','off');xlabel('t');ylabel('Amplitude'); legend('y_s(t)');axis([-2*pi 2*pi
-2.2 2.2]);  cd('C:\mohamed\scc\etud\cours\imn359\IMN359-aut2007'); print -dmeta
convol_echant2;
```

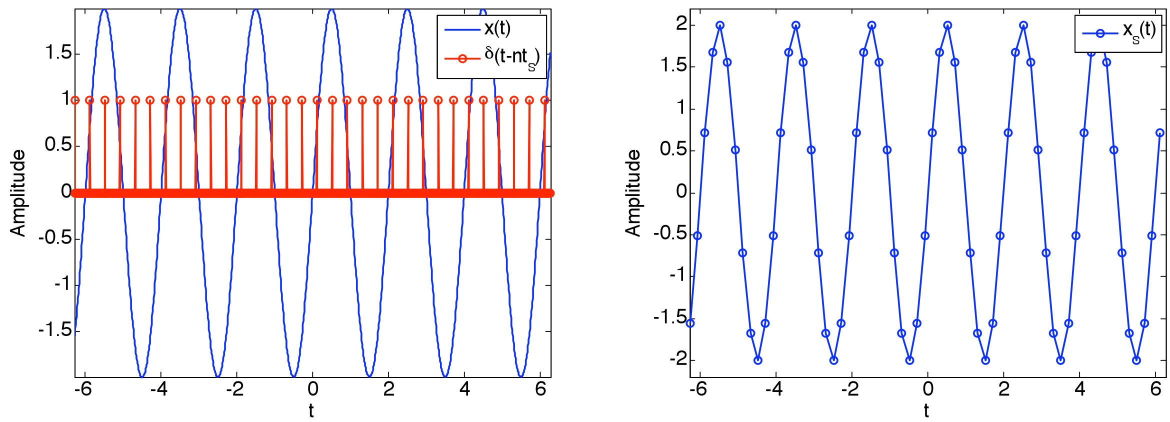

Figure. Échantillonnage de la fonction y=2sin($2\pi f_0$t).

Les effets de l'échantillonnage sont mieux étudiés dans l'espace de Fourier.

Nous avons vu que la transformée de Fourier de δ s'exprime:

$$TF[\delta(t-t_0)] = \exp(-i\omega t_0)$$

La transformée de Fourier d'un train d'impulsions espacées d'une période t_s est un train d'impulsions espacées d'une période $\omega_s = 2\pi/t_s$:

$$TF\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nt_s)\right] = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\omega_s)$$

Utilisons aussi la propriété de la convolution de deux fonctions:

$$TF\left[g_1(t)g_2(t)\right] = \frac{1}{2\pi}\left[G_1(w) \,¤\, G_2(w)\right]$$

et assimilons g_1 à la fonction x et g_2 à au train d'impulsions $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nt_s)$:

$$TF\left[x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nt_s)\right] = \frac{1}{2\pi}\left[X(\omega) \,¤\, \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)\right]$$

$$\Rightarrow \quad TF\left[x_s(t)\right] = X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(\omega) \,¤\, \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)\right]$$

$$\Rightarrow \quad X_s(\omega) = \frac{1}{t_s}\left[X(\omega) \,¤ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)\right]$$

avec $1/ts = \omega_s/2\pi$

$$\Rightarrow \quad X_s(\omega) = \frac{1}{t_s}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega) \,¤\, \delta(\omega-n\omega_s)\right]$$

$$\Rightarrow \quad X_s(\omega) = \frac{1}{t_s}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega-n\omega_s)\right]$$

► La bande f_b des fréquences délimitant le signal dépend du temps d'échantillonnage: $f_b = 1/t_s$.

► Le signal devrait donc être contenu entre $-f_b/2$ et $f_b/2$.

► Le spectre $X_s(f)$ est une succession de copies du spectre original X(f). $X_s(f)$ est une fonction périodique de période f_b.

► La transformée de Fourier X(f) de la fonction x(t) se répète sans recouvrement tant que $f_0 \leq f_b/2$. Habituellement on exprime la bande de -B à B, ou de $-f_{max}$ à f_{max}, et dans ce cas, il n'y a pas recouvrement des fonctions périodiques X(f) si $f_0 \leq 2B$ ou $f_0 \leq 2f_{max}$.

► Soit x(t) un signal de spectre X(f) à bande limitée contenu entre $-f_b/2$ et $f_b/2$. La fonction x(t) peut être reconstruite à partir de ses échantillons à intervalles réguliers ssi la fréquence d'échantillonnage f_b est supérieure au double de la fréquence maximale du signal. La fréquence d'échantillonnage critique est appelée la fréquence de Nyquist: $f_{nyquist} = f_b/2$.

► Si la fréquence d'échantillonnage n'est pas assez élevée, les composantes du signal ayant des fréquences plus grandes peuvent apparaître à d'autres endroits, corrompant ainsi le signal: repliement (folding) ou recouvrement (aliasing).

► Une fonction périodique doit être échantillonnée au moins 2 fois par période pour éviter le recouvrement (l'aliasing).

Exemple 2.
Le repliement (folding):
Lorsqu'une fréquence d'une fonction périodique se trouve à l'extérieur de la bande des fréquences, cette fréquence se replie à l'intérieur de la bande des fréquences.

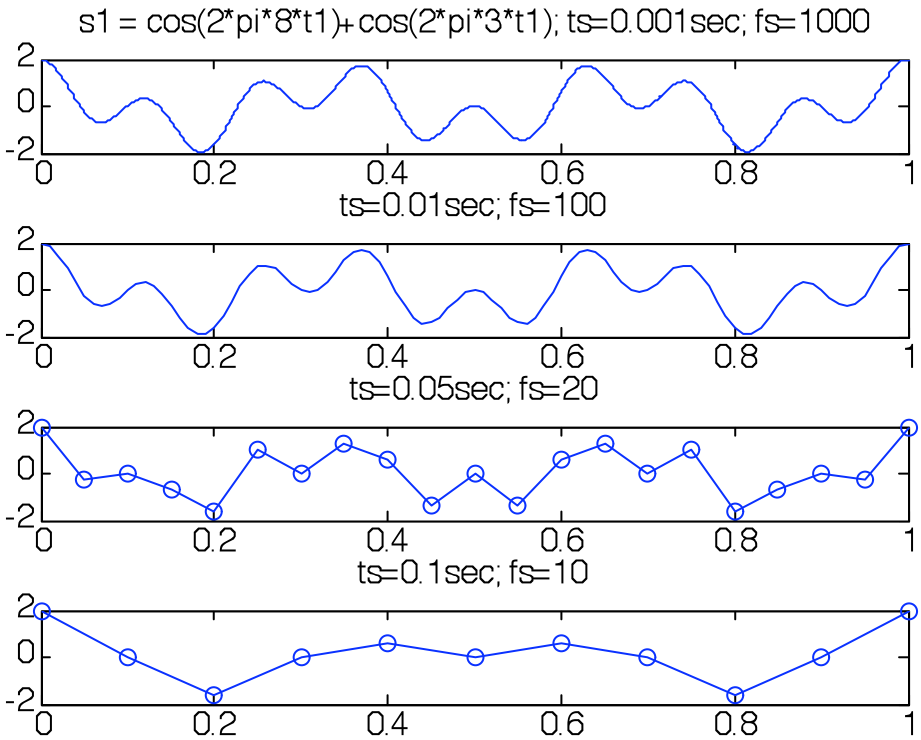

Figure. Un signal s fait de $\cos(2\pi f_1 t)+\cos(2\pi f_2 t)$ avec f_1=8 Hz (T1=0.125 sec) et f_2=3 Hz (T2=0.333 sec) pour une période globale T=1 sec et échantillonné aux 4 ts comme indiqués sur les figures. Avec ts 0.1 sec, le graphique du bas montre que l'on ne peut avoir le minimum de 2 échantillons par période pour la fréquence f1, et donc les fréquences de 8 Hz seront mal positionnées sur le graphique des fréquences ci-dessous. En fait, f1 = -8 et 8 Hz se replient autour de la bande limite -fs/2 =-5 et fs/2=5 et se retrouvent à -2 et à 2 Hz, respectivement. L'autre fréquence f2=3Hz est correctement échantillonnée et elle est donc correctement reproduite sur le graphique du bas de la figure des fréquences ci-dessous. Résultat, par cet échantillonnage incorrect, les fréquences de 8 Hz et 3 Hz se recouvrent et ne permettent donc pas une étude correcte du signal.

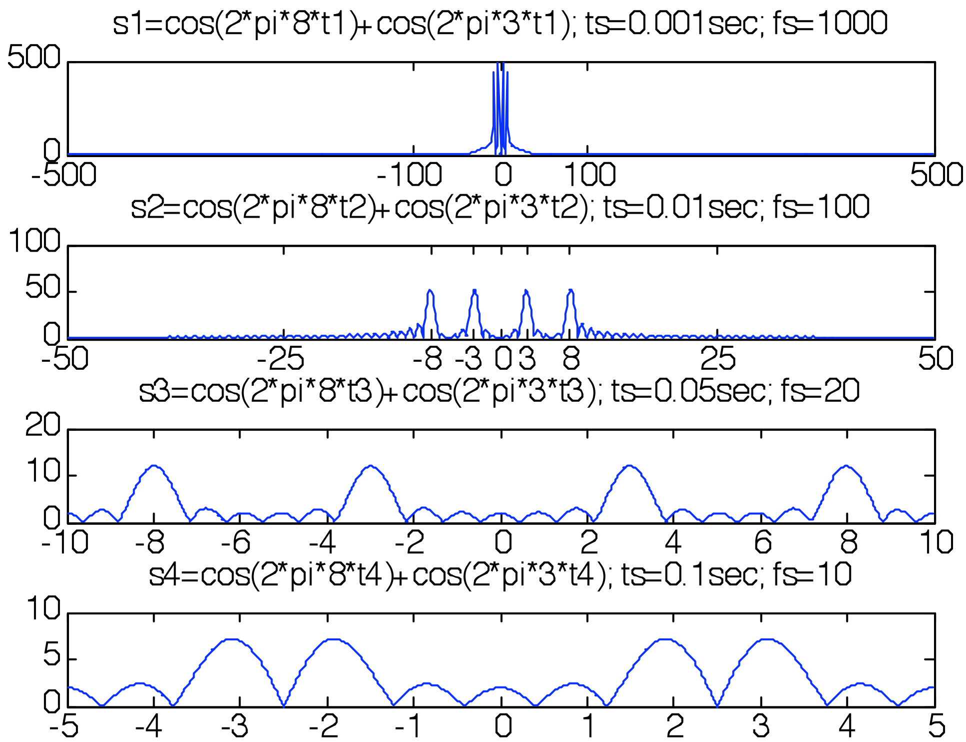

Figure. Graphiques des 4 signaux précédents et localisation des deux fréquences d'intérêt f1=8 Hz et f2=3 Hz. Sur le graphique du bas, la bande se limite à 5 Hz, et ne peut contenir la fréquence f1=8 Hz, qui se replie et se retrouve à -2 et 2 Hz.

Exemple 3.
Le recouvrement (empilement, aliasing):
Une gaussienne et sa transformée de Fourier.

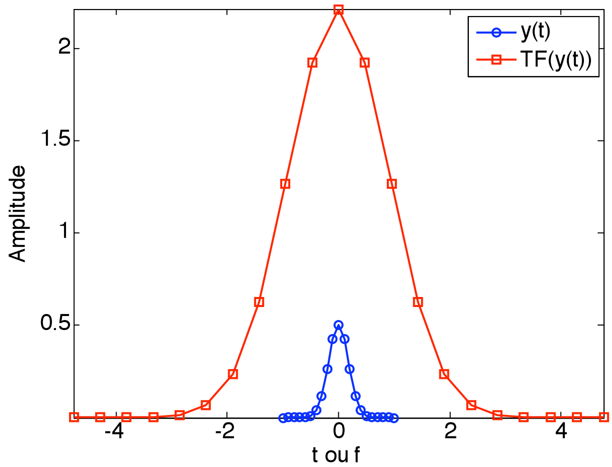

Figure. t=-1:0.1:1; a=[0.5 4]; y=a(1)*exp(-a(2)^2*t.^2). Bande = -5 à 5 Hz.

La gaussienne et sa transformée de Fourier répétée sur 6 bandes de fréquences avec un échantillonnage adéquat.

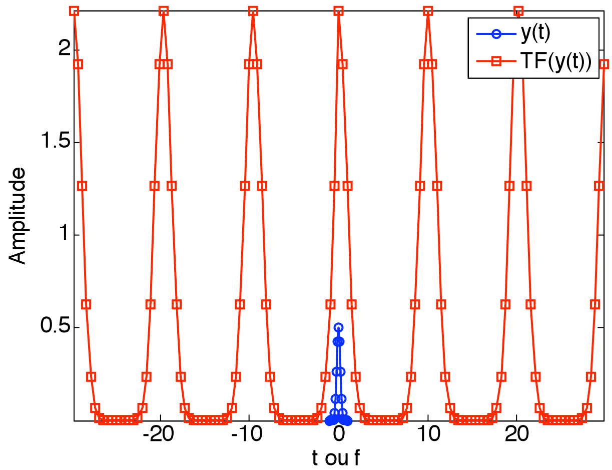

Figure. t=-1:0.1:1; a=[0.5 4]; y=a(1)*exp(-a(2)^2*t.^2). Les signaux sont reproduits sur 6 Bandes de 6*-5 à 6*5 Hz. Les signaux sont contenus chacun dans sa bande et ils sont donc séparés les uns des autres avec un échantillonnage de ts=0.1 sec.

La gaussienne et sa transformée de Fourier répétée sur 6 bandes de fréquences avec un échantillonnage inadéquat, où les signaux se recouvrent.

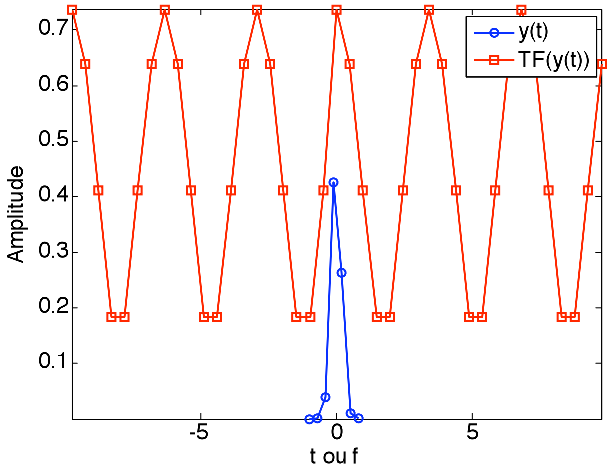

Figure. t=-1:0.3:1; a=[0.5 4]; y=a(1)*exp(-a(2)^2*t.^2). Les signaux sont reproduits sur 6 Bandes de 6*-1.66 à 6*1.66. Les signaux sont contenus chacun dans sa bande, mais l'échantillonnage de ts=0.3 sec ne permet pas de les séparer correctement et on note le recouvrement des signaux.

Le théorème de l'échantillonnage dans le domaine temporel:

Puisque le $X_s(\omega)$ est une fonction périodique: $X_s(\omega) = \frac{1}{t_s}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_0)\right]$

elle peut être développée en séries de Fourier:

$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n t/T}$ et $c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-i\omega n t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-i2\pi n t/T}dt$ avec

$\omega = 2\pi/T$.

dans le cas de $X_s(\omega)$, la variable est ω et la période est ω_0:

$$X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n\omega/\omega_0} \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{\omega_0}\int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} X_s(\omega)e^{-i2\pi n\omega/\omega_0}d\omega$$

Puisque $X_s(\omega)$ est constitué des fonctions $X(\omega)$ comprises entre $-\omega_M$ et ω_M et que $\omega_0 \geq 2\omega_M$, où $\omega_M = 2\pi B$.

$$c_n = \frac{1}{\omega_0}\int_{-\omega_M}^{\omega_M} X(\omega)e^{-i2\pi n\omega/\omega_0}d\omega$$

En faisant la transformée de Fourier inverse avec $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega$

et en considérant que $x(t)$ est à bande limitée, c'est-à-dire: $X(\omega)=0$ pour $|\omega|>\omega_M$, la transformée de Fourier inverse devient:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_M}^{\omega_M} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Remplaçant dans l'expression de $x(t)$, t par $-nt_s=-n2\pi/\omega_0$:

$$x(-\frac{n2\pi}{\omega_0}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_M}^{\omega_M} X(\omega)e^{-in2\pi\omega/\omega_0}d\omega$$

En comparant cette dernière expression avec celle de c_n:

$$c_n = \frac{2\pi}{\omega_0}x(-\frac{n2\pi}{\omega_0}) = t_s x(-nt_s)$$

À la limite $t_s=1/f_s=\pi/\omega_M=1/2f_0=1/2f_{nyquist}=1/2B$, c_n devient:

$$c_n = t_s x(-nt_s) = \frac{\pi}{\omega_M}f(-nt_s)$$

qui est substituée dans l'expression de $X_s(\omega)$:

$$X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n\omega/\omega_0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_M} f(-nt_s) e^{\mathrm{int}_s\,\omega}$$

Puisque $X_s(w) = X(w)$ $-\omega_M < w < \omega_M$, Xs(w) peut substituer X(w) dans l'expression de x(t):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_M} f(-nt_s) e^{\mathrm{int}_s\,\omega} \right] e^{i\omega t} d\omega$$

En interchangeant l'ordre de la sommation et de l'intégration:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[f(-nt_s) \int_{-\omega_M}^{\omega_M} \frac{1}{2\omega_M} e^{i(t+nt_s)\omega} d\omega \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(-nt_s) \sin c[\omega_M (t + nt_s]$$

en changeant n en -n car autant les n positifs que négatifs sont inclus dans la sommation:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nt_s) \sin c[\omega_M (t - nt_s)]$$ avec $\omega_M = \pi/t_s$.

Conclusion: avec au moins 2 échantillons par période, une fonction peut être reproduite avec précision.

Le théorème de l'échantillonnage dans le domaine fréquentiel:

Le théorème de l'échantillonnage dans le domaine des fréquences établit que si une fonction x(t) est à bande limitée et échantillonnée à des intervalles réguliers t_s, soit FT[x(t)](f)=0 pour $|f|>f_s/2$ avec $f_s=1/t_s$, alors sa transformée de Fourier X(f) peut être déterminée à partir d'échantillons $X(n\pi/t_s)$:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n\pi}{t_s}\right) \sin c\left(\omega t_s - n\pi\right)$$

Exemple 1.

t1=-30; t2=30; ts=0.01; t=t1:ts:t2; f_0=0.04; g=4*cos($2\pi f_0$t);%échantillonée à W.

L'échantillonnage W affecte la position de la fréquence f_0 sur le graphique de la TF (graphique en mauve), et aussi le nombre d'échantillons par période (points en bleus sur courbes en rouges).

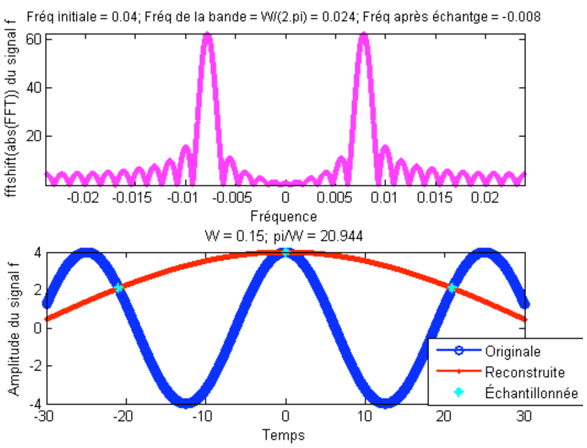

Figure. W=0.15.

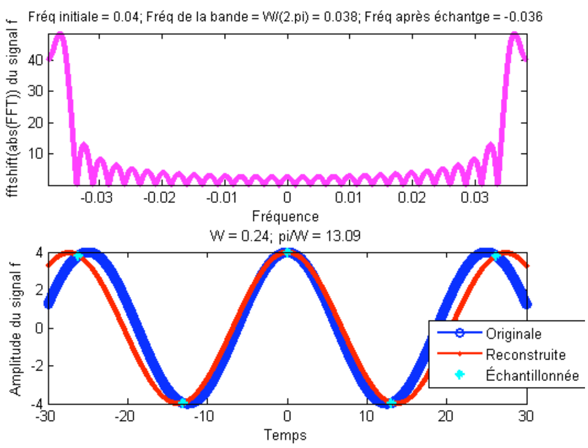

Figure. W=0.24.

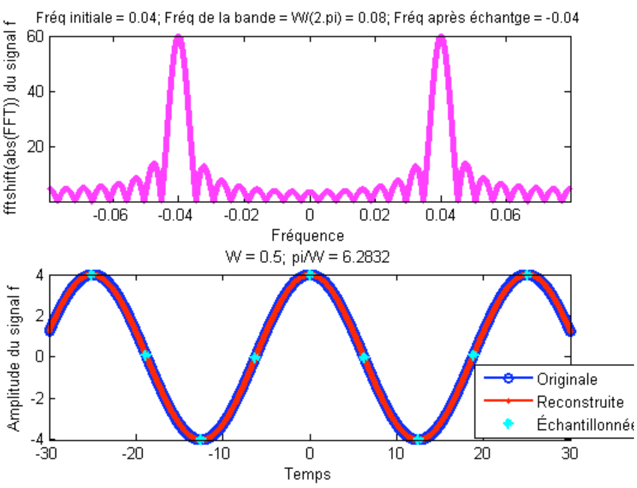

Figure. W=0.5.