I.6. C^n et produit hermitien

L'espace vectoriel C^n sur C est défini par:

$$C^n = \{\vec{z} = (z_1, z_2, \ldots z_n) \mid \forall i = 1, \ldots n, z_i \in C\}$$

avec l'opération d'addition:

$$\vec{z}^1 + \vec{z}^2 = (z_1^1, \ldots z_n^1) + (z_1^2, \ldots z_n^2) = z_1^1 + z_1^2, \ldots, z_n^1 + z_n^2$$

et l'opération de multiplication:

$$\lambda \vec{Z} = \lambda(z_1, \ldots, z_n) = \lambda z_1, \ldots, \lambda z_n$$

Le produit hermitien (ou hermitique ou scalaire) sur C^n est défini par:

$$\left\langle \vec{z}^1, \vec{z}^2 \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i^1 \bar{z}_i^2 \quad \in C$$

Le produit hermitien possède les propriétés suivantes:

1. $\left\langle \vec{z}, \vec{z} \right\rangle \geq 0 \quad et \quad \left\langle \vec{z}, \vec{z} \right\rangle = 0 \quad si \ \vec{z} = 0$
2. $\left\langle \lambda \vec{z}^1, \vec{z}^2 \right\rangle = \lambda \left\langle \vec{z}^1, \vec{z}^2 \right\rangle \quad et \quad \left\langle \vec{z}^1, \lambda \vec{z}^2 \right\rangle = \bar{\lambda} \left\langle \vec{z}^1, \vec{z}^2 \right\rangle$
3. $\left\langle \vec{z}, \vec{z}^1 + \vec{z}^2 \right\rangle = \left\langle \vec{z}, \vec{z}^1 \right\rangle + \left\langle \vec{z}, \vec{z}^2 \right\rangle$
4. $\left\langle \vec{z}^2, \vec{z}^1 \right\rangle = \overline{\left\langle \vec{z}^1, \vec{z}^2 \right\rangle}$

Orthogonalité: $\vec{z}^1 \ et \ \vec{z}^2$, deux éléments de C^n, sont orthogonaux si:

$$\left\langle \vec{z}^1, \vec{z}^2 \right\rangle = 0$$

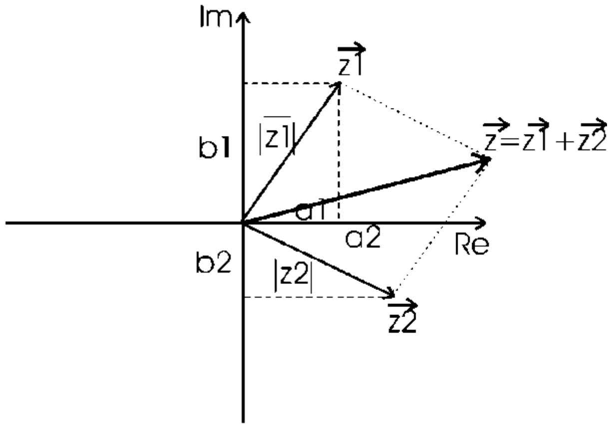
La norme (ou longueur) d'un élément de C^n est définie par:

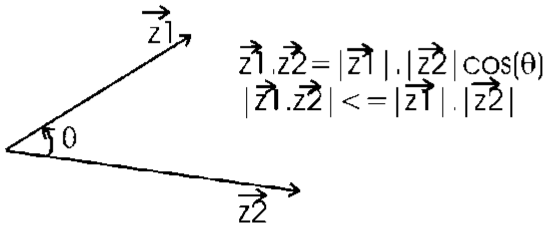
$$\|\vec{z}\| = \left\langle \vec{z}, \vec{z} \right\rangle^{1/2} \ avec \ \|\vec{z}\| \geq 0 \ et \ \|\vec{z}\| = 0 \quad si \ \vec{z} = 0; \ \|\lambda \vec{z}\| = |\lambda| \|\vec{z}\|$$

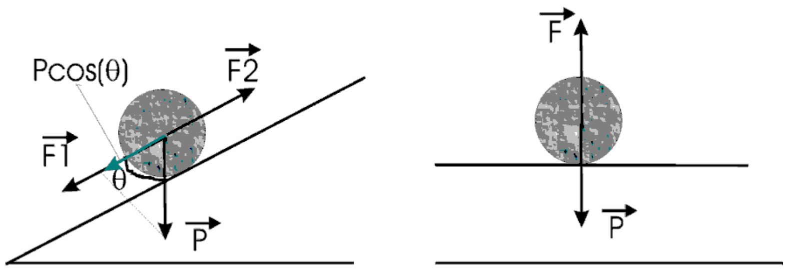
$$\left|\left\langle \vec{z}^1, \vec{z}^2 \right\rangle\right| \leq \|\vec{z}^1\| \|\vec{z}^2\| \quad inégalité \ de \ Cauchy\text{-}Schwarz$$

$$\|\vec{z}^1 + \vec{z}^2\| \leq \|\vec{z}^1\| + \|\vec{z}^2\|$$

$$\|\vec{z}^1 + \vec{z}^2\|^2 = \|\vec{z}^1\|^2 + \|\vec{z}^2\|^2 \quad si \left\langle \vec{z}^1, \vec{z}^2 \right\rangle = 0 \quad Théorème \ de \ Pythagore$$







Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{F}$ et $\vec{P}$ s'écrit: $\vec{F}.\vec{P} = \left|\vec{F}\right|.\left|\vec{P}\right|\cos(\theta)$

Si $\vec{F} = F_1\vec{e}_1 + F_2\vec{e}_2 + F_3\vec{e}_3$ et $\vec{P} = P_1\vec{e}_1 + P_2\vec{e}_2 + P_3\vec{e}_3$: $\vec{F}$ et $\vec{P}$ orthogonaux si $F_1P_1 + F_2P_2 + F_3P_3 = 0$.

Exercices:

Trouver les racines suivantes et les représenter graphiquement.
1- Trouver la racine $3^{\text{ième}}$ de z = exp(-iπ/6)
2- Trouver la racine $4^{\text{ième}}$ de z = 2.5- 2.5*sqrt(3)i

II. Série de Fourier.

*Jean Baptiste Joseph Fourier, France, 1768-1830.*

Fourier travaillait sur la diffusion de la chaleur dans les matériaux et a proposé de représenter une fonction, continue ou discontinue, par une série de cosinus et de sinus.

II.1. Développement orthogonal

Soit la fonction f définie sur [0,T] et à valeurs complexes:

$f(t) \in C \quad \forall t \in [0, T]$

f(t) est de carré intégrable si:

$\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty$. On dit alors que f(t) est dans l'ensemble $L^2(0, T)$ des fonctions carrés intégrables définies sur l'intervalle [0, T].

Le produit hermitien

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t)\bar{g}(t)dt$$

(Par analogie à z : $\langle \vec{z}^1, \vec{z}^2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i^1 \bar{z}_i^2$)

La norme de f (l'intervalle de l'intégration peut être de -t1 à t2):

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\int_0^T f(t)\bar{f}(t)dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

(Rappel des z : z=a+ib ➔ module de z : $|z|^2=(a^2+b^2)$. Ce même résultat peut s'obtenir avec le produit: $|z|^2 = z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = (a^2+b^2)$.

Rappel des vecteurs : la norme d'un vecteur **v** : $\|\mathbf{v}\|=(\mathbf{v}.\mathbf{v})^{1/2}$).

Deux fonctions f et g sont orthogonales ssi:

$\langle f, g \rangle = 0$

Deux fonctions f et g sont orthonormées ssi:

$\langle f, g \rangle = 0$ et $\|f\| = 1 \quad et \quad \|g\| = 1$

La valeur absolue et la norme: la valeur absolue d'un nombre est la valeur de ce nombre sans son signe. Exemple: |-5| = |5| = 5.

La valeur absolue ou module d'un nombre complexe z = a + ib est $|z| = (z\bar{z})^{1/2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

La norme d'un vecteur est la racine carrée de la somme des carrées de ses composantes dans un repère orthonormé. Ceci concerne aussi les nombres complexes qui ont deux composantes. Ex.: z = a + ib et $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$;

$\vec{v} = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 \Rightarrow v_{xy}^2 = 3^2 + 5^2$ et $v^2 = v_{xy}^2 + 2^2 \Rightarrow v = \sqrt{3^2 + 5^2 + 2^2}$

La norme est un scalaire souvent appelé module, longueur, distance,....

Par contre la norme d'une fonction complexe ne se résume pas à sa valeur absolue. Ex.:

$f(t) = 6t + 3i$ définie sur [0,1]. Sa norme est:

$$\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2} = \left(\int_0^T f(t)\bar{f}(t)dt\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 (6t + 3i)(6t - 3i)dt\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 (36t^2 + 9)dt\right)^{1/2}$$

$$= \left(\left[\frac{36t^3}{3} + 9t\right]_0^1\right)^{1/2} = \sqrt{21}$$

et sa valeur absolue, tout comme un nombre complexe, est: $|f| = \sqrt{36t^2 + 9}$

Exemple 1:

Calculer le produit hermitien de f(t) = 3t et g(t) = sin(2πt) sur [0,1].

Le produit hermitien s'écrit: $\langle f, g\rangle = \int_0^T f(t)\bar{g}(t)dt$, soit $\langle f, g\rangle = \int_0^1 3t.\sin(2\pi t)dt$

Intégration par partie: $\int u dv = [uv] - \int v du$

u = 3t; du = 3dt; dv = sin(2πt)dt, soit v = -cos(2πt)/2π.

$$\int_0^1 3t.\sin(2\pi t)dt = \left[-3t\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t)\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{3}{2\pi}\cos(2\pi t)dt = -\frac{3}{2\pi}$$

Exemple 2:

Calculer le produit hermitien de f(t) = t^2 et g(t) = 9+8it sur [0,1].

$$\langle f,g\rangle = \int_0^T f(t)\bar{g}(t)\,dt = \int_0^1 t^2(9-8i\,t)\,dt = \int_0^1 (9t^2-8i\,t^3)\,dt$$

$$= \left[\frac{9t^3}{3} - \frac{8i\,t^4}{4}\right]_0^1 = 3-2i$$

Exemple 3:

Calculer la norme de f(t) = 3t + i sur [0,1].

$$\|f\| = \langle f,f\rangle^{1/2} = \left(\int_0^T f(t)\bar{f}(t)\,dt\right)^{1/2} =$$

$$\left(\int_0^1 (3t+i)\,(3t-i)\,dt\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 (9t^2+1)\,dt\right)^{1/2} = \left(3t^3+t\Big|_0^1\right)^{1/2} = 2$$

Exemple 4:

Les fonctions f(t) = t et g(t) = 3t - 2 sont-elles orthogonales sur [0,1]?

f et g sont orthogonales si $\langle f,g\rangle = 0$.

$$\langle f,g\rangle = \int_0^T f(t)\bar{g}(t)dt = \int_0^1 t(3t-2)dt = \left[t^3-t^2\right]_0^1 = 0$$

Exemple 5:

Vérifier que l'ensemble { $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi i\ nt/T}$}, avec n ∈ Z, est orthonormé dans $L^2(0,T)$.

Vérifier l'orthogonalité:

Soit deux éléments $e_m(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi i\ mt/T}$ et $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi i\ nt/T}$, avec m != n. Ils sont orthogonaux si le produit hermitien est nul: $\langle e_m(t), e_n(t)\rangle = 0$ ==>

$$\langle e_m(t), e_n(t)\rangle = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi imt/T} \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-2\pi i nt/T} dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^{2\pi i(m-n)t/T} dt$$

$$\frac{1}{T}\left[\frac{T}{2\pi i(m-n)} e^{2\pi i(m-n)t/T}\right]_0^T = \left[\frac{\cos(2\pi(m-n)t/T) - i\sin(2\pi(m-n)t/T)}{2\pi i(m-n)}\right]_0^T =$$

$$\frac{\cos(2\pi(m-n)T/T) - i\sin(2\pi(m-n)T/T)}{2\pi i(m-n)} - \frac{\cos(0) - i\sin(0)}{2\pi i(m-n)} = 0 \quad \forall \text{m,n} \qquad (\text{m} \neq \text{n})$$

Vérifier l'orthonormalité:

$$\|e_n\| = \left[\int_0^T \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi \text{int}/T} . \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-2\pi \text{int}/T} dt\right]^{1/2} = \left[\frac{1}{T}\int_0^T e^0 dt\right]^{1/2} = \left[\frac{1}{T}[t]_0^T\right]^{1/2} = 1$$

Exemple 6:

Vérifier l'orthogonalité sur [0,T] de cos(2πnt/T) et sin(2πnt/T).

$\langle \cos(2\pi mt/T), \cos(2\pi nt/T)\rangle = 0$ ==>

$$\int_0^T \cos(2\pi mt/T)\cos(2\pi nt/T)dt = \int_0^T \frac{1}{2}\left[\cos(\frac{2\pi t}{T}(m-n)) + \cos(\frac{2\pi t}{T}(m+n))\right]dt$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{T}{2\pi(m-n)}\sin(\frac{2\pi t}{T}(m-n)) + \frac{T}{2\pi(m+n)}\sin(\frac{2\pi t}{T}(m+n))\right]_0^T = 0$$

$$\int_0^T \sin(2\pi mt/T)\sin(2\pi nt/T)dt = \int_0^T \frac{1}{2}\left[\cos(\frac{2\pi t}{T}(m-n)) - \cos(\frac{2\pi t}{T}(m+n))\right]dt$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{T}{2\pi(m-n)}\sin(\frac{2\pi t}{T}(m-n)) - \frac{T}{2\pi(m+n)}\sin(\frac{2\pi t}{T}(m+n))\right]_0^T = 0, \qquad m \neq n$$

$$\textit{if}\ \ \mathrm{m} = \mathrm{n} \Rightarrow \int_0^T \cos(2\pi nt/T)\cos(2\pi nt/T)dt = \int_0^T \frac{1}{2}\left[1 + \cos(\frac{4\pi nt}{T})\right]dt$$

$$\left[\frac{1}{2}\left[t + \frac{T}{4\pi n}\sin(\frac{4\pi nt}{T})\right]_0^T\right] = \frac{T}{2}$$

$$\textit{if}\ \ \mathrm{m} = \mathrm{n} \Rightarrow \int_0^T \sin(2\pi nt/T)\sin(2\pi nt/T)dt = \int_0^T \frac{1}{2}\left[1 - \cos(\frac{4\pi nt}{T})\right]dt$$

$$\left[\frac{1}{2}\left[t - \frac{T}{4\pi n}\sin(\frac{4\pi nt}{T})\right]_0^T\right] = \frac{T}{2}$$

On démontre (faites-le comme exercice) de la même façon que pour m = n ou m ≠ n:

$$\langle \cos(2\pi mt/T), \sin(2\pi nt/T)\rangle = \langle \sin(2\pi mt/T), \cos(2\pi nt/T)\rangle = 0$$

II.2. Les fonctions périodiques

Par définition, une fonction f(t) est périodique de période T si f(t) = f(t+T), ou, d'une façon générale: f(t) = f(t+nT) avec $n \in Z$.

T est la plus petite période de f(t): c'est la période fondamentale.

Exemple 1:

Trouver la période de f(t) = cos(t/3) + cos(t/4).

cos(t/3) + cos(t/4) = cos((t+T)/3) + cos((t+T)/4)

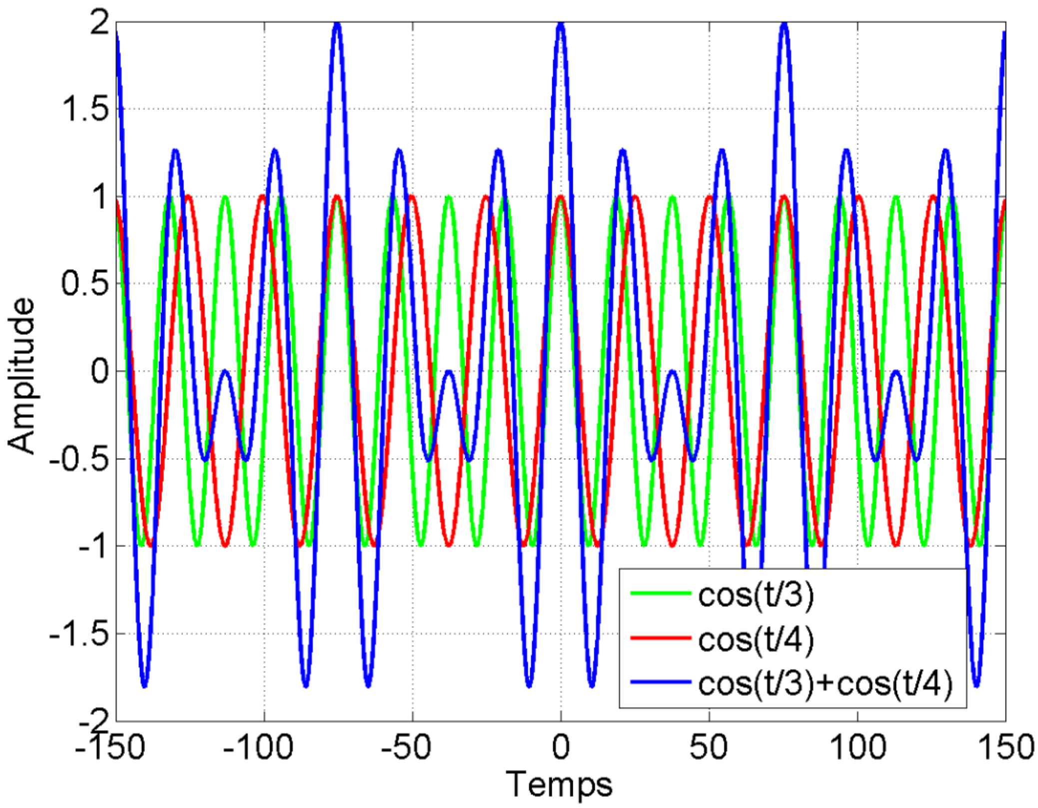
Sachant que la période de cos(t) est 2π, soit cos(t) = $\cos(t + 2\pi m)$, alors

avec un changement de variable x = t/3 et T_1 = T/3, cos(x + T_1) a une période de $T_1 = 2\pi m$, soit T/3 $= 2\pi m \Rightarrow T = 6\pi m$.

Une autre méthode: le cosinus a une période de 2π et s'exprime comme $\cos(2\pi t/T_1)$. En identifiant les coefficients du temps t dans cos(t/3) et dans $\cos(2\pi t/T_1)$, on obtient: $2\pi/T_1 = 1/3 \Rightarrow T_1 = 6\pi$.

Idem pour cos(t/4 + T/4) $\Rightarrow T = 8\pi n$.

La période fondamentale est la plus petite période, soit le plus petit commun multiple de 6 et 8, i.e. m = 4 et n = 3 $\Rightarrow T = 24\pi$.




```
Voir code python dans démo pour la génération de ce graphique.
```

Exemple 2:

Trouver la période de $f(t) = \cos^2(t)$.

$\cos^2(t) = (1+\cos(2t))/2$

$\cos^2(t) = (1+\cos(2(t+T)))/2$

$= (1+\cos(x+T_1))/2$ avec $x = 2t$ et $T_1 = 2T$.

Puisque la période de $\cos(x)$ est $2\pi \Rightarrow T_1 = 2\pi m$, ou bien $2T = 2\pi m$

$\Rightarrow T = m\pi$. La période fondamental de $f(t)$ est donc π.

Exemple 3:

Trouver la période de $f(t) = \sin(t) + \sin(t/3) + \sin(t/5)$. $2\pi/T_1=1 \Rightarrow T_1 = 2\pi$; $2\pi/T_2=1/3 \Rightarrow T_2 = 6\pi$; $2\pi/T_3=1/5 \Rightarrow T_3 = 10\pi$. Le PPCM de T_1, T_2 et T_3 est $30\pi \Rightarrow T = 30\pi$.

Exercice:

Trouver la période de $f(t) = \sin(\pi t) + \sin(\pi t/3) + \sin(\pi t/5)$.