ure

Intuition de la multirésolution

88/7 = 12. ~~817~~ 5714285....

Selon la précision désirée, 88/7 peut être approximée comme

0, 10, 12, 12.5, 12.57, etc...

(comme une pyramide de Gaussienne à multiple résolution)

Les ondelettes encodent les différences entre les résolutions (normalement facteur 2 en imagerie)

(ici dans le système décimal impose le facteur 10)

	~~Diff.~~ Approximations	Différences		
f_0	0	10.0	w_0	$j=1$
f_1	10	2.0	w_1	$j=2$
f_2	12	0.5	w_2	
f_3	12.5	0.07	w_3	
f_4	12.57			
⋮	⋮	⋮		

Plus on augmente la résolution, plus on attrape les détails

sans redondance

$88/7 = 10 + 2 + 0.5 + 0.07 + \ldots$

* Les nombres décimaux peuvent approximer n'importe quel nombre

Algo

$$a_3$$

Signal $= (\cancel{3,2}\ 3, 1; 0, 4, 8, 6, 9, 9)$

Étape 1

moyennes $= \cancel{\text{moyennes}_1} = \cancel{\left(\frac{3+1}{2}, \frac{1+0}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{4+8}{2}, \frac{8+6}{2}, \frac{6+9}{2}, \frac{9+9}{2}\right)}$
$= a$

"coeffs d'approximation" $= \left(\frac{3+1}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{8+6}{2}, \frac{9+9}{2}\right)$

$$a_2 = (2, 2, 7, 9)$$

coeffs $= \cancel{\text{diff}_1}\ \text{diff}_1 = \left(\frac{3-1}{2}, \frac{0-4}{2}, \frac{8-6}{2}, \frac{9-9}{2}\right)$

"coeffs de détails" $d_2 = (1, -2, 1, 0)$

Étape 2 :

On garde diff$_1$
et on continue sur les a

$$a_1 = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{7+9}{2}\right) = (2, 8)$$

$$d_1 = \left(\frac{2-2}{2}, \frac{7-9}{2}\right) = \cancel{\left(\frac{0}{2}, \frac{-1}{2}\right)}$$

....

$$a_0 = \left(\frac{2+8}{2}\right) = 5$$

$$d_0 = \left(\frac{2-8}{2}\right) = -3$$

Reconstruction :

$S = (3, 1, 0, 4, 8, 6, 9, 9)$

$fwt(S) = (5, -3, 0, -1, 1, -2, 1, 0)$

$= (a_3 ; d_3 ; d_2 ; d_1)$

On retrouve

S^2 échelle 2

$$\left.\begin{array}{l} a_3 = \frac{x+y}{2} \\ d_3 = \frac{x-y}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = a3 + d3 \\ y = a3 - d3 \end{array}$$

$S^2 = (a_3 + d_3, a_3 - d_3 ; d_2 ; d_1)$

$= ((2, 8) ; (0, -1) ; -2, 1, 0) = (a_2, d_2, d_1)$

On retrouve

$S^1 = (\vec{a}_2 + \vec{d}_2, \vec{a}_2 - \vec{d}_2 ; d_1)$

$= ((2+0), 2-0, 8-1, 8+1 ; 1, -2, 1, 0)$

$= (2, 2, 7, 9 ; 1, -2, 1, 0) = (a_1 ; d_1)$

On retrouve finalement S

$\tilde{S} = (\vec{a}_1 + \vec{d}_1 ; \vec{a}_1 - \vec{d}_1)$

$= (2+1, 2-1, 2-2, 2+2, 7-1, 7+1, 9+0, 9-0)$

$= (3, 1, 0, 4, 6, 8, 9, 9)$

Erreur est nul ! $S = \tilde{S}$!

(1) Construction (1)

☆ Ondelette de Haar

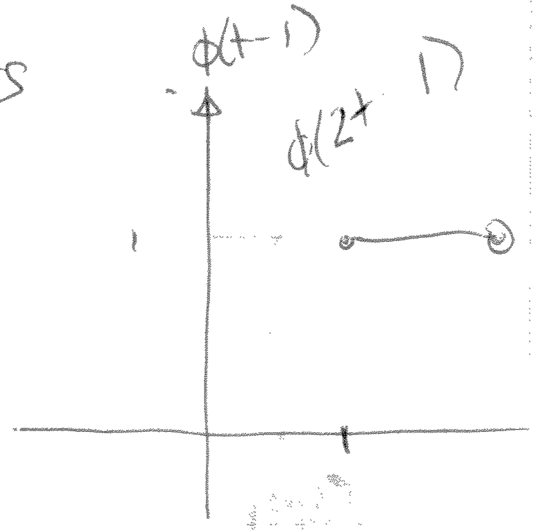
1909

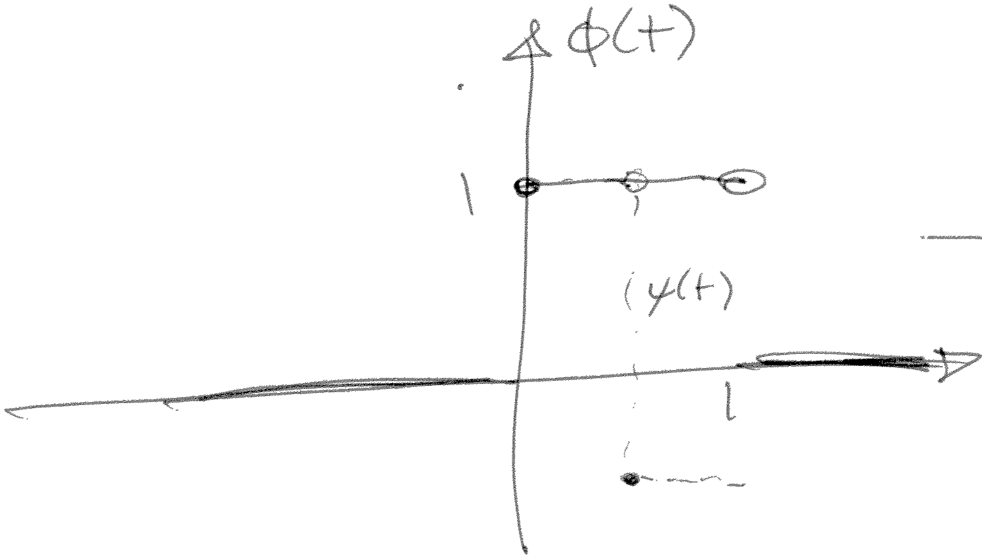
☆ Bien avant la multirésolution

Ancêtre des ondelettes. Fait purement par construction

fonction d'échelle

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$





$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1/2 \\ -1 & 1/2 \le t < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On voit que

(1) $\psi(t) = \phi(t)_{[0,1/2[} - \phi(t)_{[1/2,1[}$

$= \phi(2t) - \phi(2t-1)$

(2) $\phi(t) = \phi(t)_{[0,1/2[} + \phi(t)_{[1/2,1[}$

$= \phi(2t) + \phi(2t-1)$

(1) + (2) $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{\psi(t) + \phi(t)}{2} = \phi(2t)}$

(1) − (2) $\Rightarrow$ $\psi(t) - \phi(t) = -2\phi(2t-1)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\phi(2t-1) = \dfrac{\phi(t) - \psi(t)}{2}}$

$\boxed{\text{Thm :}}$

$$\phi(2^j x - 2k) = \frac{\psi(2^{j-1}x - k) + \phi(2^{j-1}x - k)}{2}$$

$$\phi(2^j x - 2k - 1) = \frac{\phi(2^{j-1}x - k) - \psi(2^{j-1}x - k)}{2}$$

Montrez-le $\quad k \in \mathbb{Z}$

On s'en va où avec ça ?

~~Prenons j=1 et k=0~~

~~$\phi(2x)$~~

C'est quoi la version de f, estimée à l'échelle j ?

$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \, \phi(2^j x - k) \quad \in V_j$$

$$= \sum_k \left(a_{2k} \, \phi(2^j x - 2k) + a_{2k+1} \, \phi(2^j x - 2k - 1) \right)$$

$$= \sum_k \left[a_{2k} \left(\frac{\phi(2^{j-1}x - k) + \psi(2^{j-1}x - k)}{2} \right) + a_{2k+1} \left(\frac{\phi(2^{j-1}x - k) - \psi(2^{j-1}x - k)}{2} \right) \right]$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[\underbrace{\left(\frac{a_{2k} + a_{2k+1}}{2} \right)}_{\text{moyenne des amplitudes}} \phi\left(\frac{2^{j-1}x - k}{2} \right) + \underbrace{\left(\frac{a_{2k} - a_{2k+1}}{2} \right)}_{\text{différence des coefficients}} \psi\left(2^{j-1}x - k \right) \right]$$

$$= \cancel{\sum_k a_k^{j-1}} \; f_{j-1} + W_{j-1}$$

f_{j-1} : Approximation du signal à une échelle + grossière

W_{j-1} : Détails

On continue avec $j-1$

$$f_{j-1}(x) = \sum a_k^{j-1} \phi(2^{j-1}x - k)$$

$$= \sum_{\text{paire}} + \sum_{\text{impaire}}$$

$$= W_{j-2} + f_{j-2}$$

....

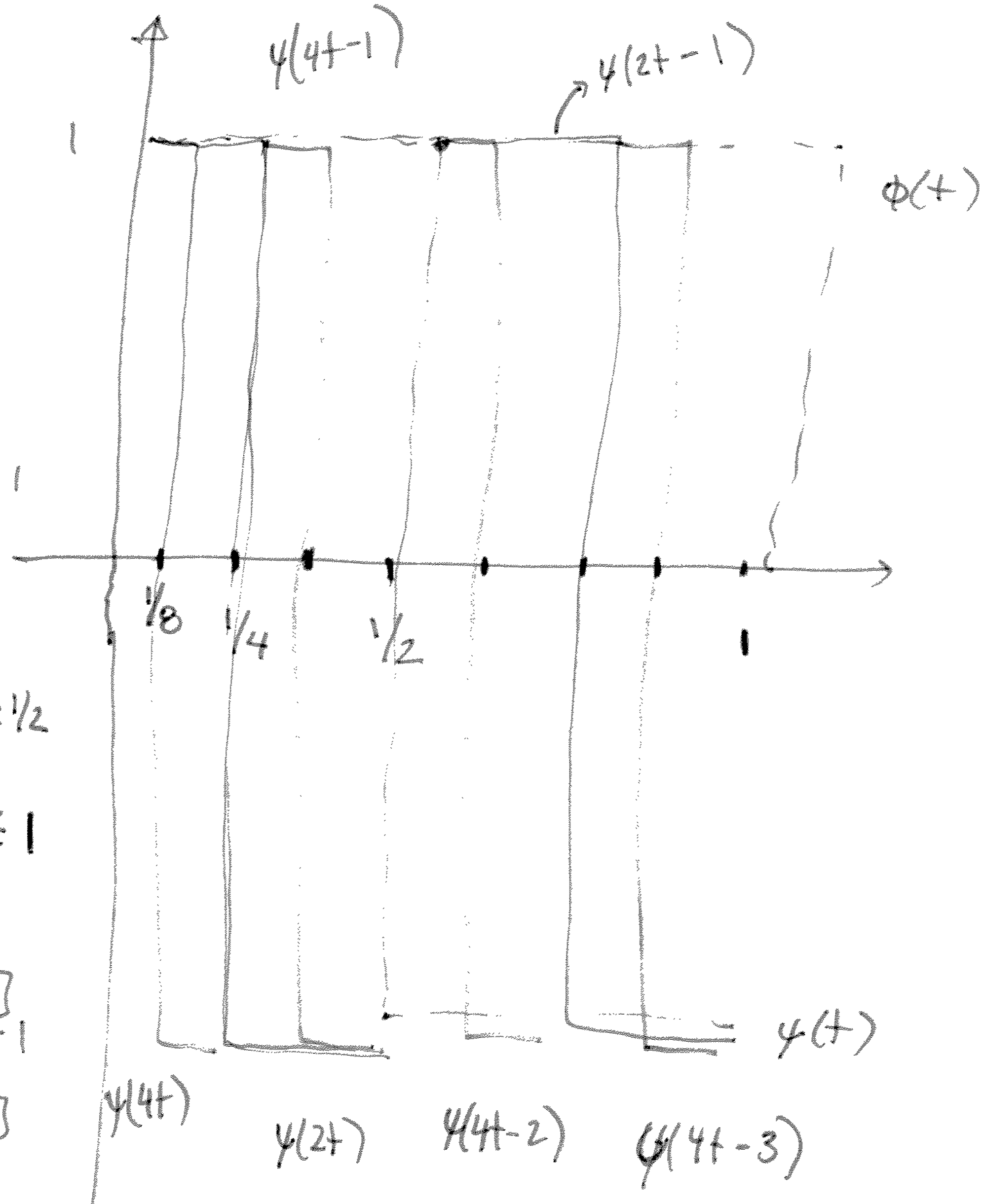
$$\therefore \quad f_j = W_{j-1} + W_{j-2} + \dots + W_1 + W_0 + \underline{\underline{f_0}}$$

(Rappel : $88/7 = \dots + 0.07 + 0.5 + 2 + 10 + 0$

Ex 1 : $(\cancel{\ }\,5, \cancel{\ }\,{-3}, 0, -1, \cancel{\ }\,1, -2, 1, 0)$ $\quad 2^3$

$\quad a_0 \quad d_0 \quad d_1 \quad\quad d_2$

$$a_0\phi(t) + d_0\psi(t) + d_{10}\psi(2t) + d_{20}\psi(4t)$$
$$+ d_{11}\psi(2t-1) \quad + d_{21}\psi(4t-1)$$
$$+ d_{22}\psi(4t-2)$$
$$+ d_{23}\psi(4t-3)$$



$\phi(t) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

$5\phi(t) = \begin{cases} 5 & 0 \le t \le 1 \\ 0 \end{cases}$

+

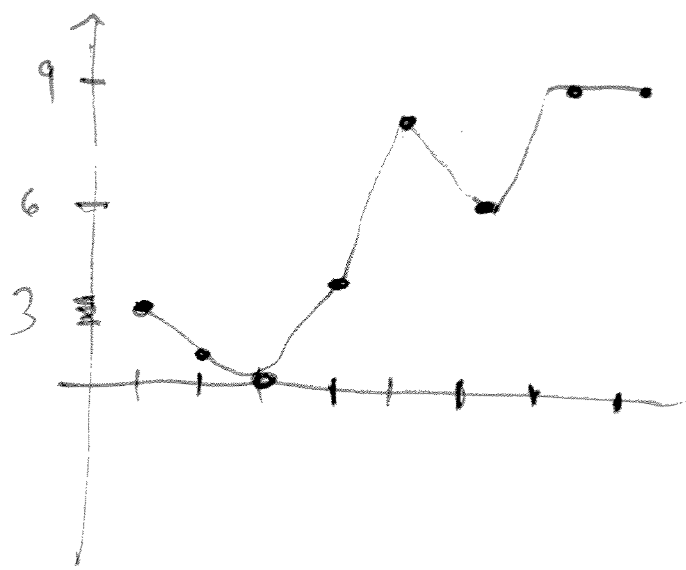
$-3\psi(t) = \begin{cases} 2 & 0 \le t \le 1/2 \\ 8 & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$

$\cdot \; 0\psi(2t) = \begin{cases} 2 & [0, 1/2] \\ 8 & [1/2, 1] \end{cases}$

$\cdot \; -1\psi(2t-1) = \begin{cases} 2 & [0, 1/2] \\ 7 & [1/2, 3/4] \\ 9 & [3/4, 1] \end{cases}$

2 [0 1/4]
2 [1/2 1/2]

$+ \; \psi(4t) - 2\psi(4t-1) + \psi(4t-2) + 0\psi(4t-3) = \begin{cases} 3 & [0, 1/8] \\ 1 & [1/8, 2/8] \\ 0 & [2/8, 3/8] \\ 4 & [3/8, 4/8] \\ 8 & [4/8, 5/8] \\ 6 & [5/8, 6/8] \\ 9 & [6/8, 7/8] \\ 9 & [7/8, 8/8] \end{cases}$



• inverse marche aussi

Faites-le.

☆ Encore une fois, on prouve tout ça de façon formelle demain

5) ϕ est $\perp$ à sa version translatée par un entier

$$\langle \phi(x), \phi(x-k) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,\phi(x-k)\,dx$$

$\phi(x)$: $[0,1]$, 0 ailleurs

$\phi(x-k)$: $[k,k+1]$, 0 ailleurs

$= 0$ ✓

☆ $\boxed{\text{\underline{Thm}: } \phi(2^j x - k) \text{ est une base } \perp \text{ de } V_j}$

ϕ génératrice une multirésolution

☆☆ On va pouvoir utiliser ϕ pour approximer n'importe laquelle fonction ☆☆

$\Rightarrow$ Ondelettes de Haar

Thm de Décomposition de Haar

★ $$f_j = w_{j-1} + f_{j-1}$$

$$w_{j-1} = \sum b_k^{j-1} \psi(2^{j-1}x - k)$$

$$f_{j-1} = \sum a_k^{j-1} \phi(2^{j-1}x - k)$$

$$b_k^{j-1} = \frac{a_{2k}^{j} - a_{2k+1}^{j}}{2} \qquad \underline{\text{diff}}$$

$$a_k^{j-1} = \frac{a_{2k}^{j} + a_{2k+1}^{j}}{2} \qquad \underline{\text{moyenne}}$$

★ Vous montrez la reconstruction dans votre <u>TP</u> 4.