IMN538 - Animation par ordinateur

Feuile de référence

Quaternions

Le mardi 13 janvier 2009

1 Notation

Un quaternion est noté :

$$\begin{aligned} q &= [s, (x, y, z)] \\ &= [s, v] \end{aligned}$$

$$\text{où } v = (x, y, z)$$

2 Propriétés

Les quaternions sont non-commutatifs : $q_1 q_2 \neq q_2 q_1$

Les quaternions sont associatifs : $q_1(q_2 q_3) = (q_1 q_2) q_3$

3 Opérations

Addition :	$[s_1, v_1] + [s_2, v_2] = [s_1 + s_2, v_1 + v_2]$
Multiplication :	$[s_1, v_1][s_2, v_2] = [s_1 \cdot s_2 - v_1 \cdot v_2, s_1 v_2 + s_2 v_1 + v_1 \times v_2]$
Multiplication avec une constante :	$(k)[s, v] = [ks, kv]$
Produit Scalaire :	$[s_1, v_1] \cdot [s_2, v_2] = s_1 s_2 + v_1 \cdot v_2$
Norme :	$\|\|q\|\| = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}$
Identité :	$[s, v][1, (0, 0, 0)] = [s, v]$
Inverse :	$q^{-1} = (\frac{1}{\|\|q\|\|})^2 [s, -v]$
	$q^{-1} q = q q^{-1} = [1, (0, 0, 0)]$
	$(pq)^{-1} = q^{-1} p^{-1}$
Normalisation :	$q/(\|\|q\|\|)$

4 Opposé d'un quaternion

L'opposé (négatif) d'un quaternion est égal à ce même quaternion positif.

Démonstration :

$$
\begin{aligned}
-q &= Rot_{[-\theta,-(x,y,z)]} \\
&= [cos(-\theta/2), sin(-\theta/2)(-(x,y,z))] \\
&= [cos(\theta/2), -sin(\theta/2)(-(x,y,z))] \\
&= [cos(\theta/2), sin(\theta/2)(x,y,z)] \\
&= Rot_{[\theta,(x,y,z)]} \\
&= q
\end{aligned}
$$

Pour comprendre la démonstration, notons que :

(1) Sin est une fonction **impaire**, donc $-sin(\theta) = sin(-\theta)$
(2) Cos est une fonction **paire**, donc $cos(-\theta) = cos(\theta)$

5 Rotation à l'aide de quaternion

Il est possible de construire un quaternion représentant une rotation à partir, entre autre, de la représentation par angle et axe :

$$Rot_{[\theta,(x,y,z)]} = [cos(\theta/2), sin(\theta/2)(x,y,z)]$$

La rotation d'un vecteur 3D v à l'aide d'un quaternion s'effectue comme suit :

$$v' = Rot(v) = qvq^{-1}$$

où v est converti en un quaternion tel que :

$$v = [0, (v_x, v_y, v_z)]$$

La concaténation de plusieurs rotations s'effectue comme suit :

$$\begin{aligned} Rot_q(Rot_p(v)) &= q(pvp^{-1})q^{-1} \\ &= (qp)v(p^{-1}q^{-1}) \\ &= (qp)v(qp)^{-1} \\ &= Rot_{qp}(v) \end{aligned}$$

6 Conversion

Il est possible de convertir un quaternion en une matrice 3×3 représentant une orientation :

$$q = [s, (x, y, z)]$$

$$M_q = \begin{bmatrix} 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2xy - 2sz & 2xz + 2sy \\ 2xy + 2sz & 1 - 2x^2 - 2z^2 & 2yz - 2sx \\ 2xz - 2sy & 2yz + 2sx & 1 - 2x^2 - 2y^2 \end{bmatrix}$$

7 Interpolation de quaternions

L'interpolation entre deux quaternions est appellée une *interpolation linéaire sphérique* (Linear Spherical Interpolation), aussi appellée "Slerp". Elle se calcule comme suit :

(1) On trouve l'angle qui sépare les deux quaternions :

$$cos(\theta) = q_1 \cdot q_2 = s_1 s_2 + v_1 \cdot v_2$$

(2) Grâce à cet angle, on interpole entre les deux quaternions :

$$slerp(q_1, q_2, u) = \frac{sin((1-u)\theta)}{sin(\theta)} q_1 + \frac{sin(u\theta)}{sin(\theta)} q_2$$

8 Notes importantes

Lors de l'expression d'une rotation à partir d'un angle et d'un axe, la partie scalaire s sera toujours située entre -1 et 1.

Ceci étant dit, il est possible qu'un quaternion possède une partie scalaire s supérieure à 1 ou inférieure à -1. Dans un tel cas, procéder à une rotation résultera en une transformation ne préservant pas l'isométrie. Autrement dit, un modèle à laquelle on appliquerait cette rotation serait déformée, ses distances n'étant pas préservées.