

IMN-359

Décomposition/Reconstruction
en ondelettes 2D

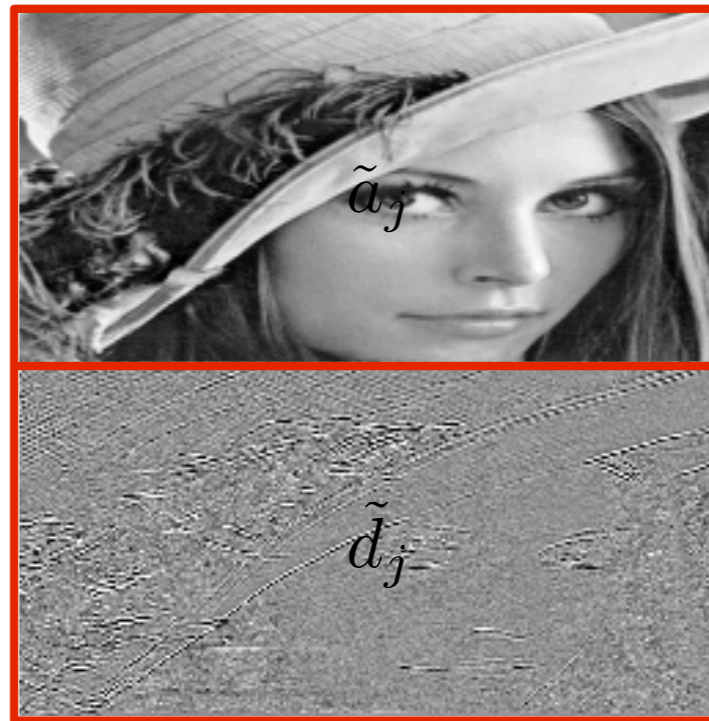
Approximation 2D de Haar



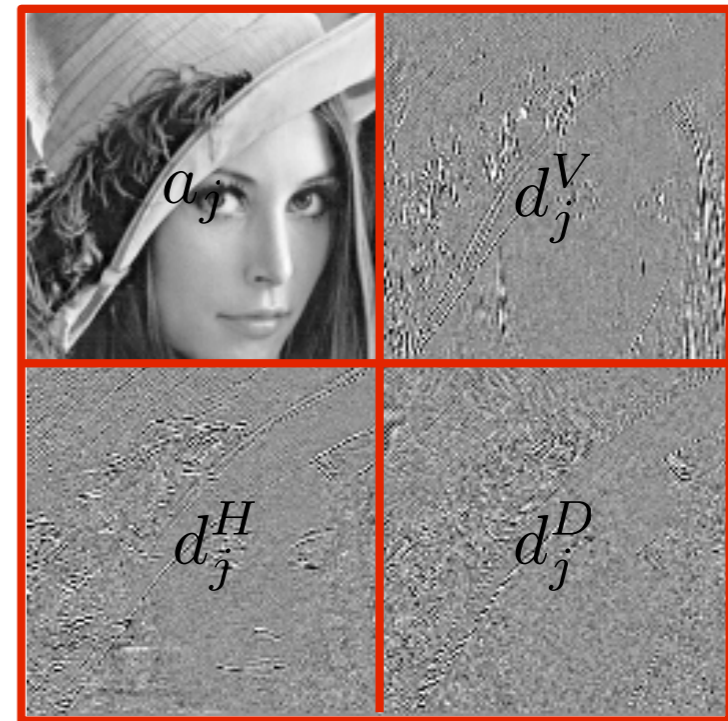
Multirésolution
échelle 2^j entre $j = 8$ et 5



Coefficients a_j



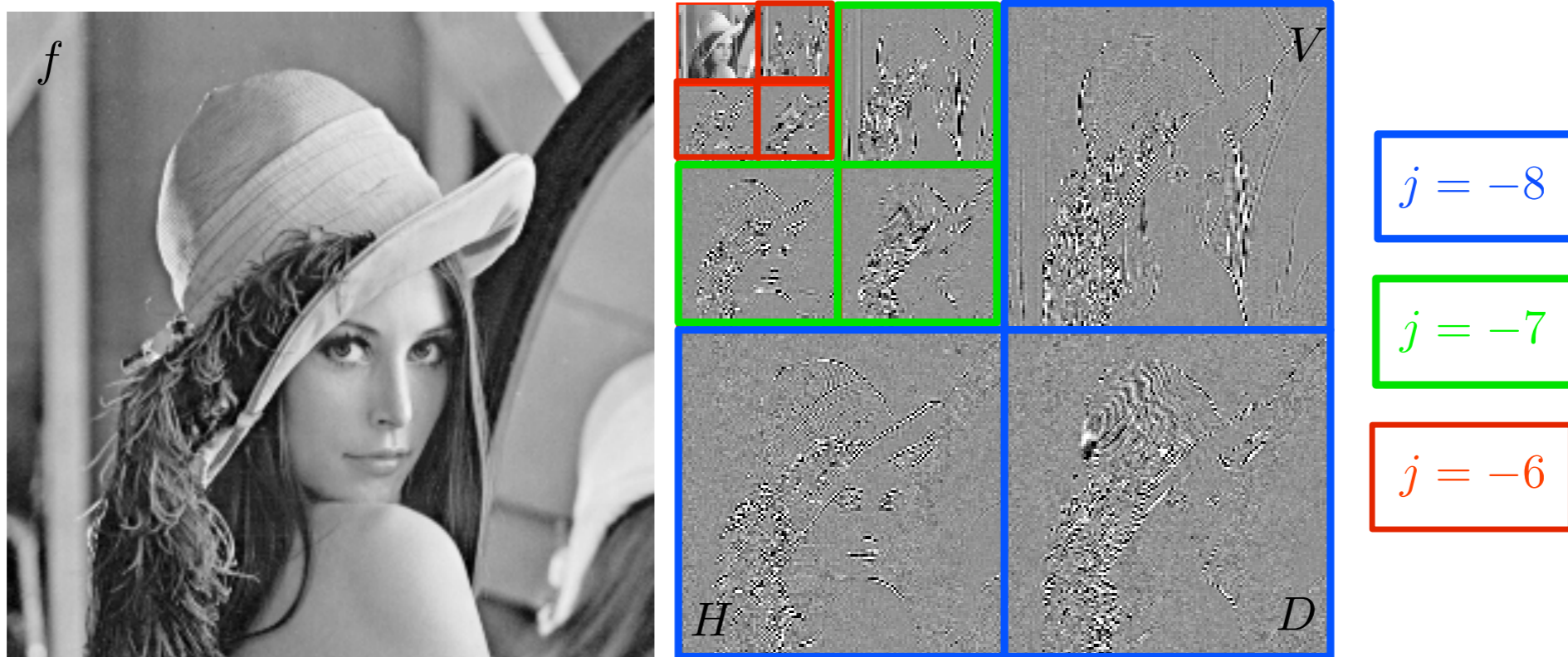
Transform on rows



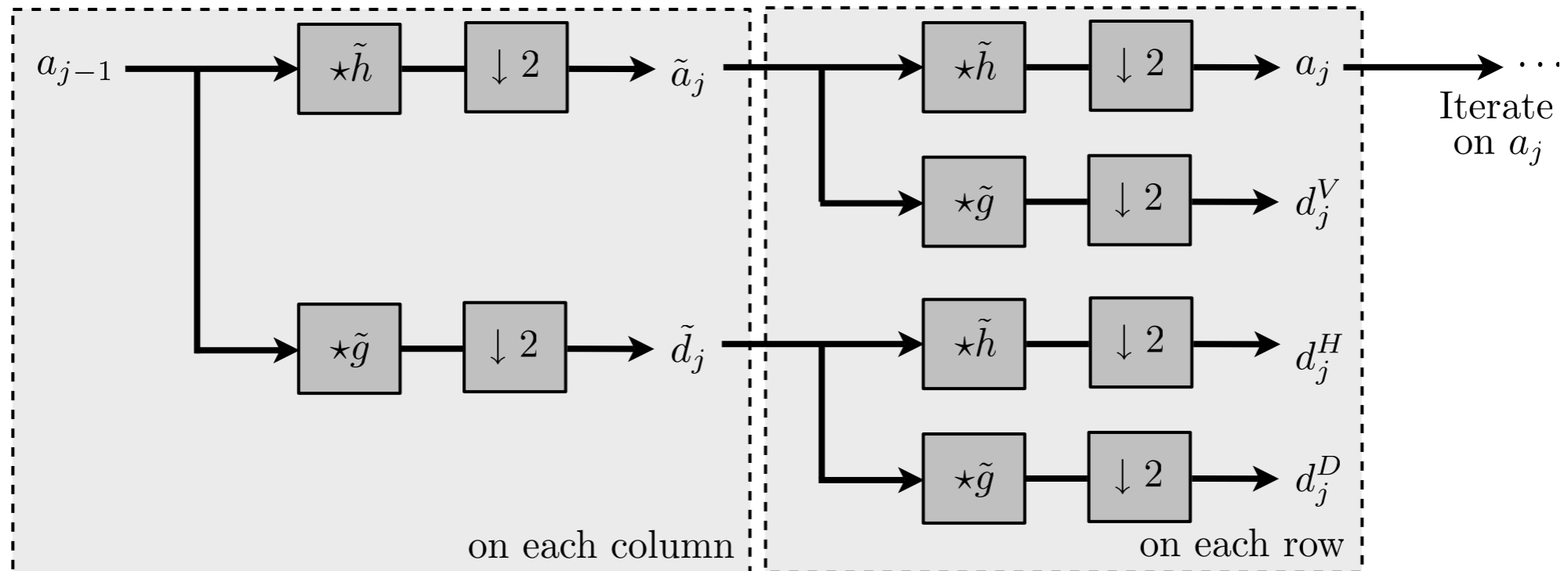
Transform on columns

- 1) On décompose sur les rangées. On check si l'énergie est conservée. On reconstruit pour revenir sur Lena.
- 2) On décompose le résultat sur les colonnes. On check que l'énergie est conservée. On reconstruit pour revenir sur l'image du milieu.

Décomposition ondelettes 2D



Décomposition



Aujourd'hui

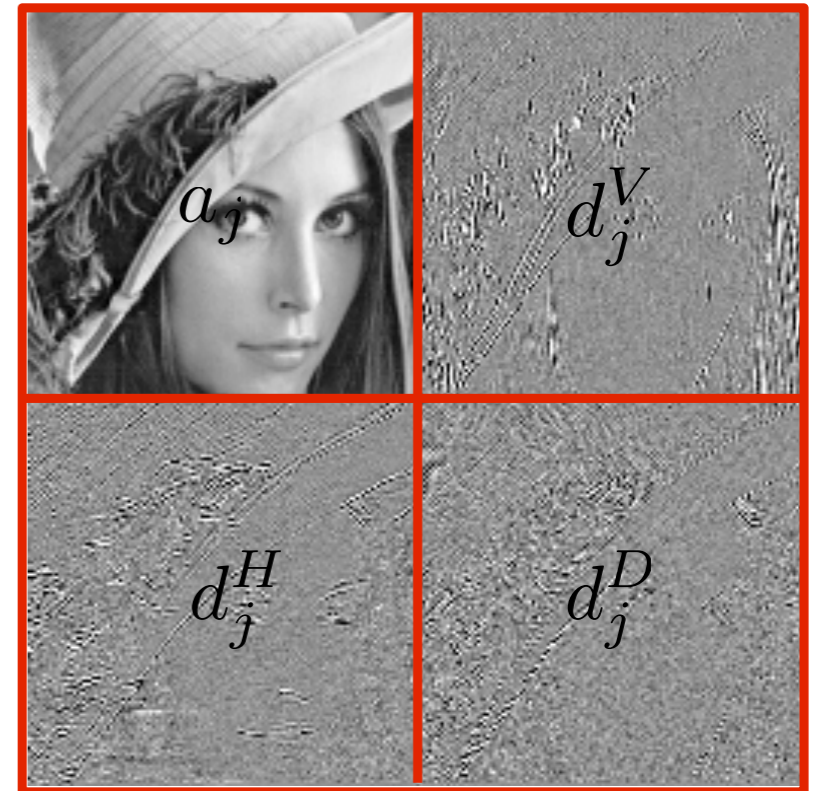
1. Décomposition - fwt2
(check conservation d'énergie)
2. Reconstruction - ifwt2
(check erreur nulle)
3. Approximation linéaire - linapprox
($M \times M$ premiers coefficients)
4. Approximation nonlinéaire - nonlinapprox
(M^2 plus gros coefficients)



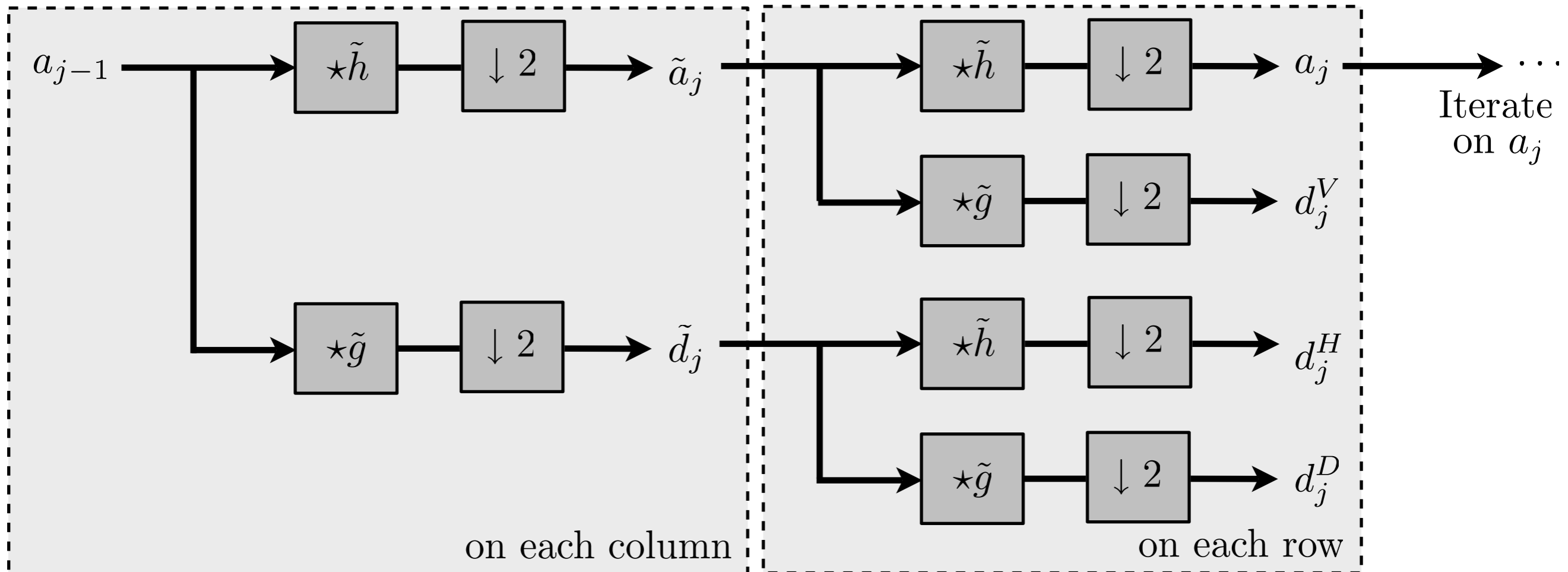
Coefficients a_j



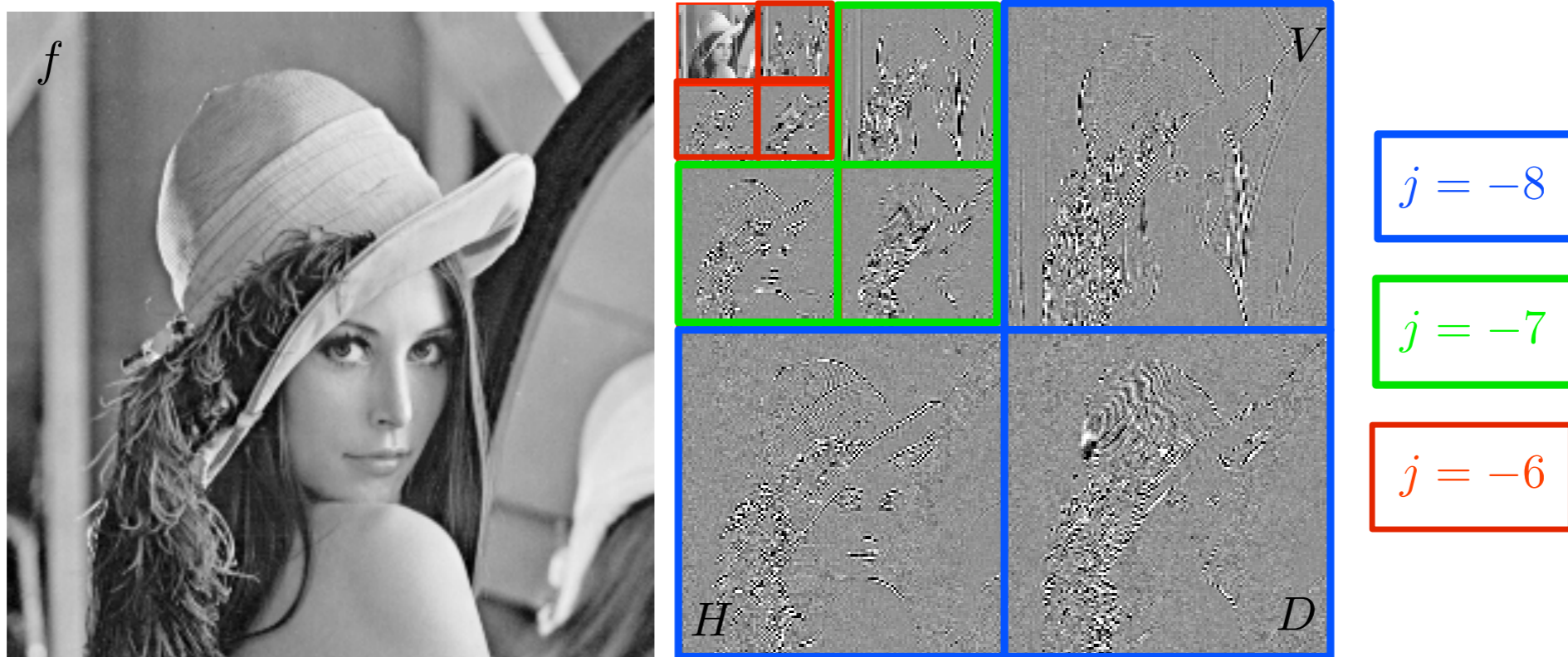
Transform on rows



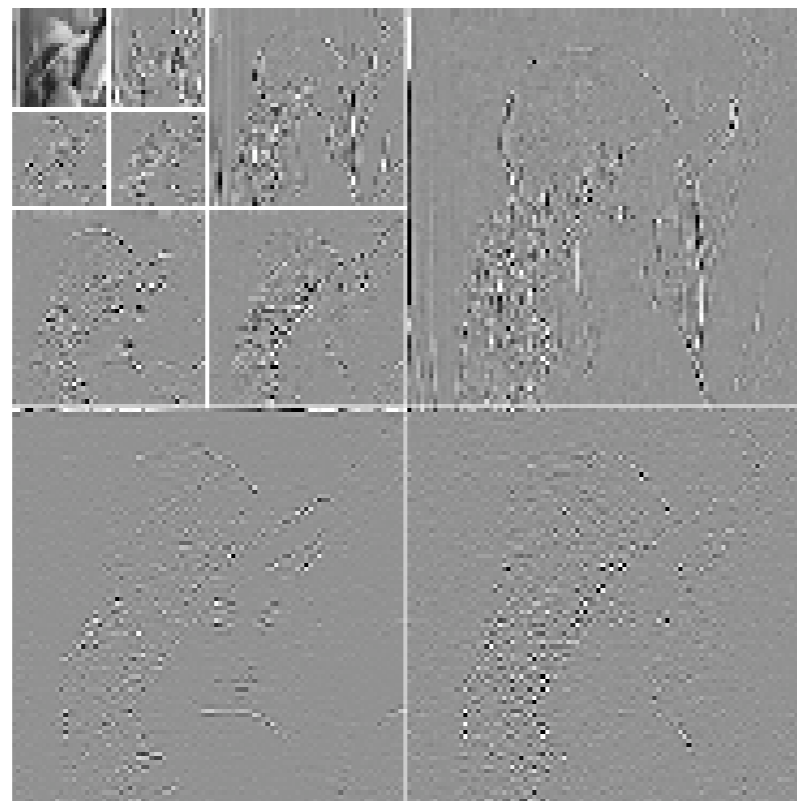
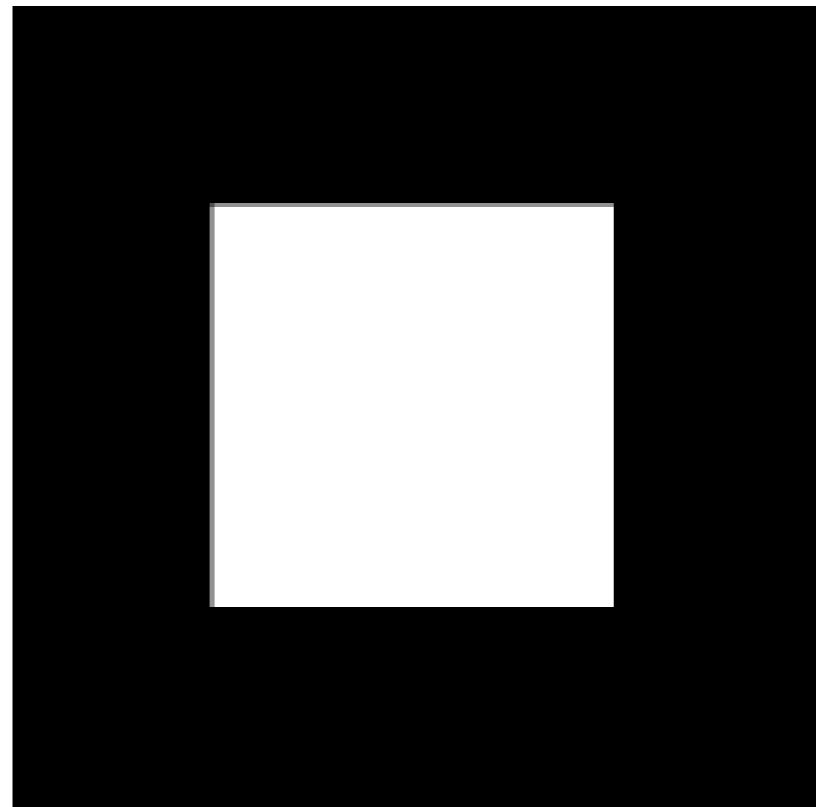
Transform on columns



Décomposition ondelettes 2D



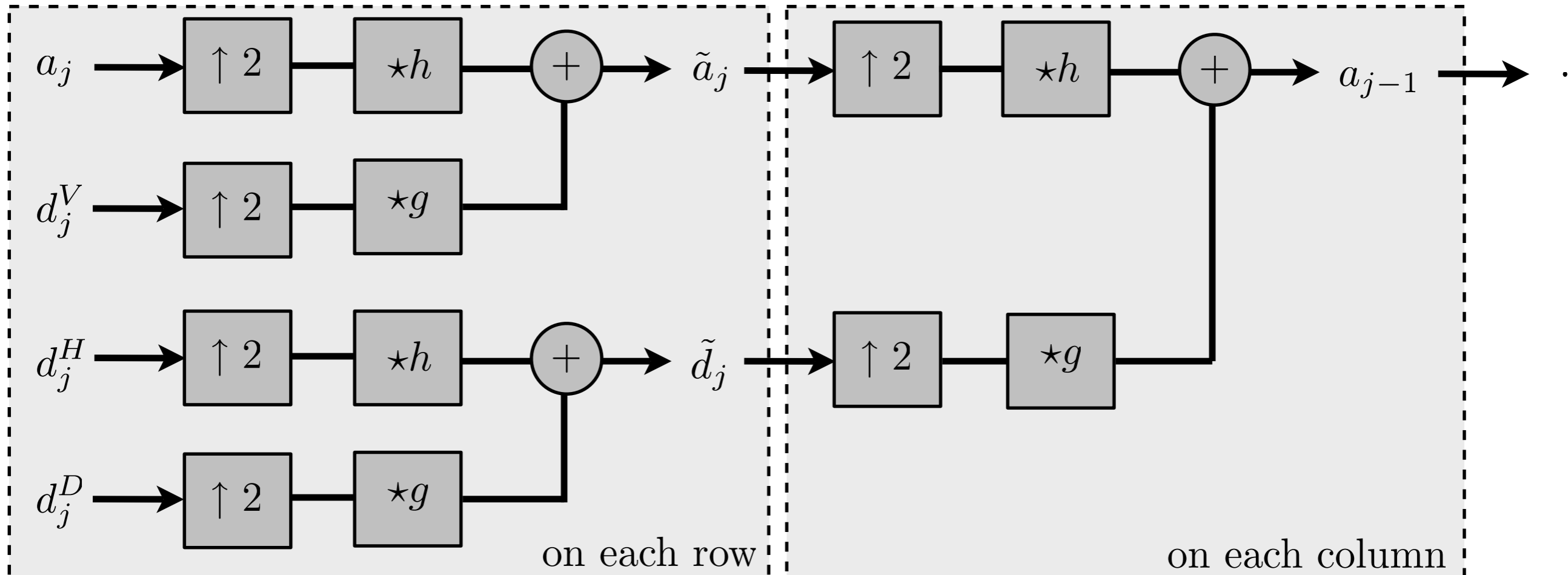
a_{L+3}	d_{L+3}^2		
d_{L+3}^1	d_{L+3}^3	d_{L+2}^2	
d_{L+2}^1	d_{L+2}^3	d_{L+1}^2	
d_{L+1}^1		d_{L+1}^3	



Aujourd'hui

1. Décomposition - fwt2
(check conservation d'énergie)
2. Reconstruction - ifwt2
(check erreur nulle)
3. Approximation linéaire - linapprox
($M \times M$ premiers coefficients)
4. Approximation nonlinéaire - nonlinapprox
(M^2 plus gros coefficients)

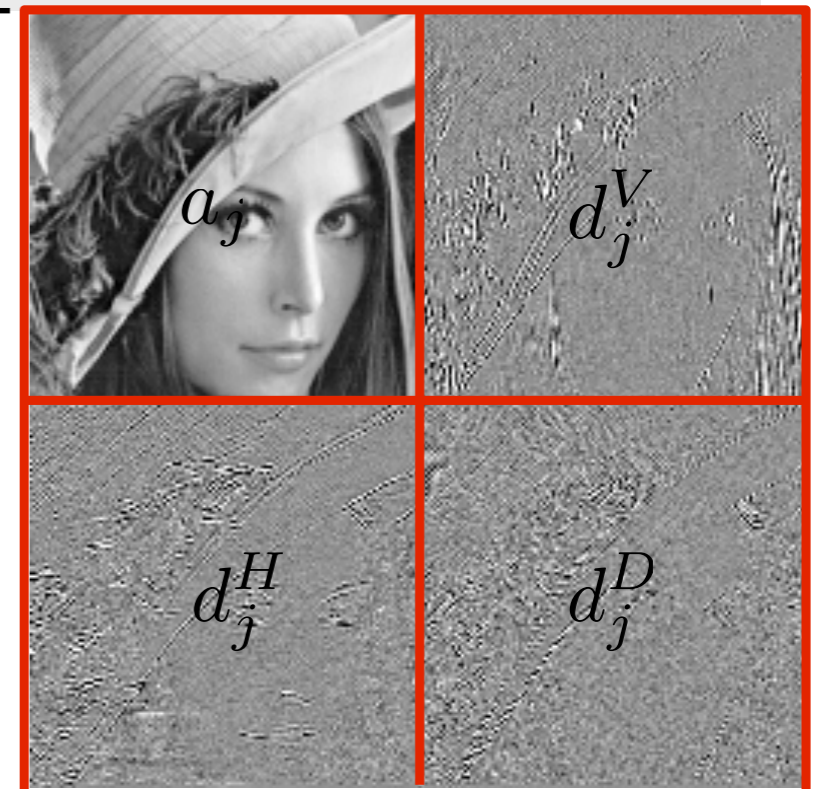
Reconstruction ondelettes 2D



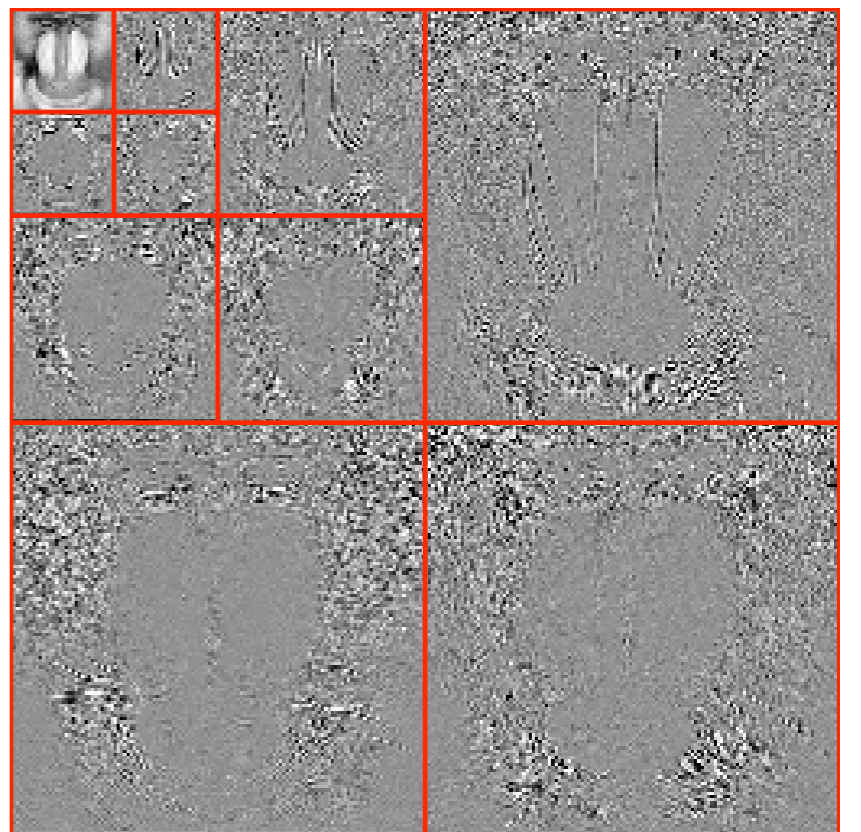
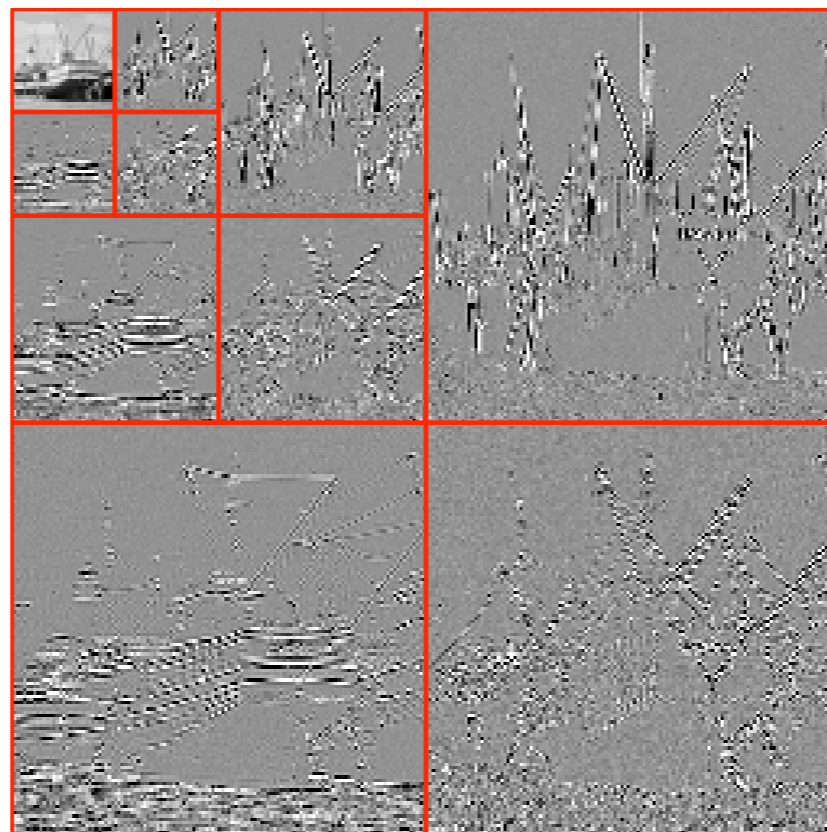
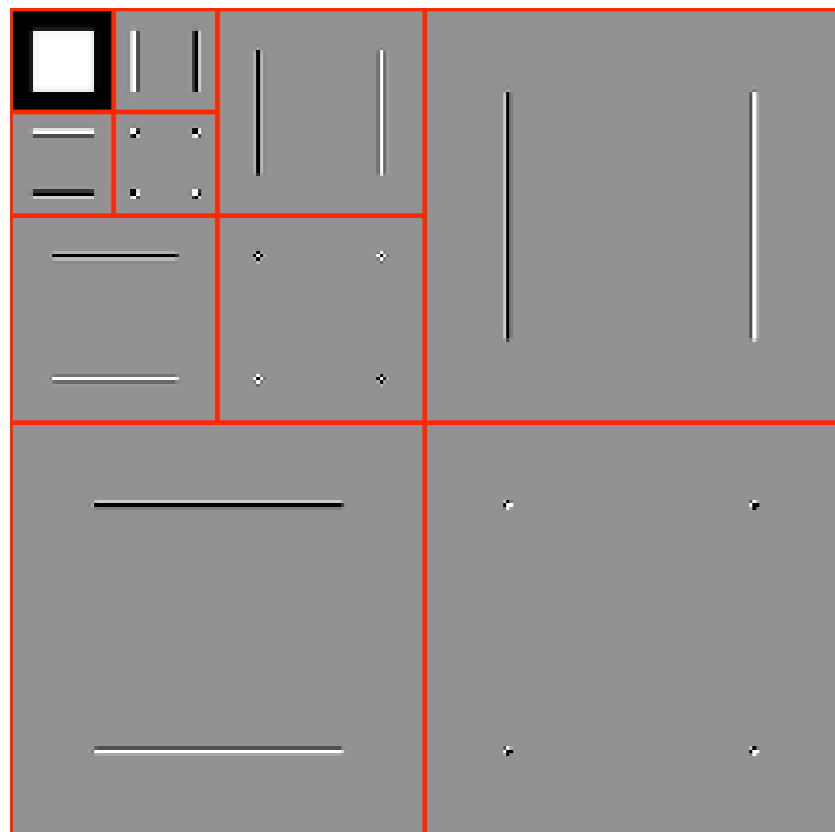
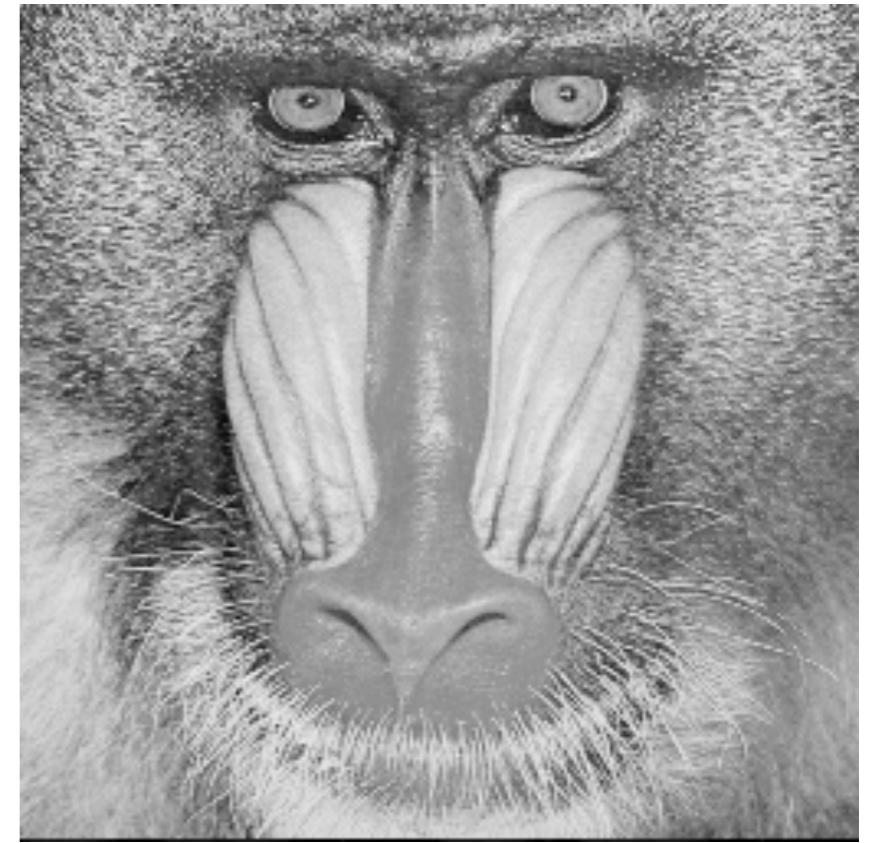
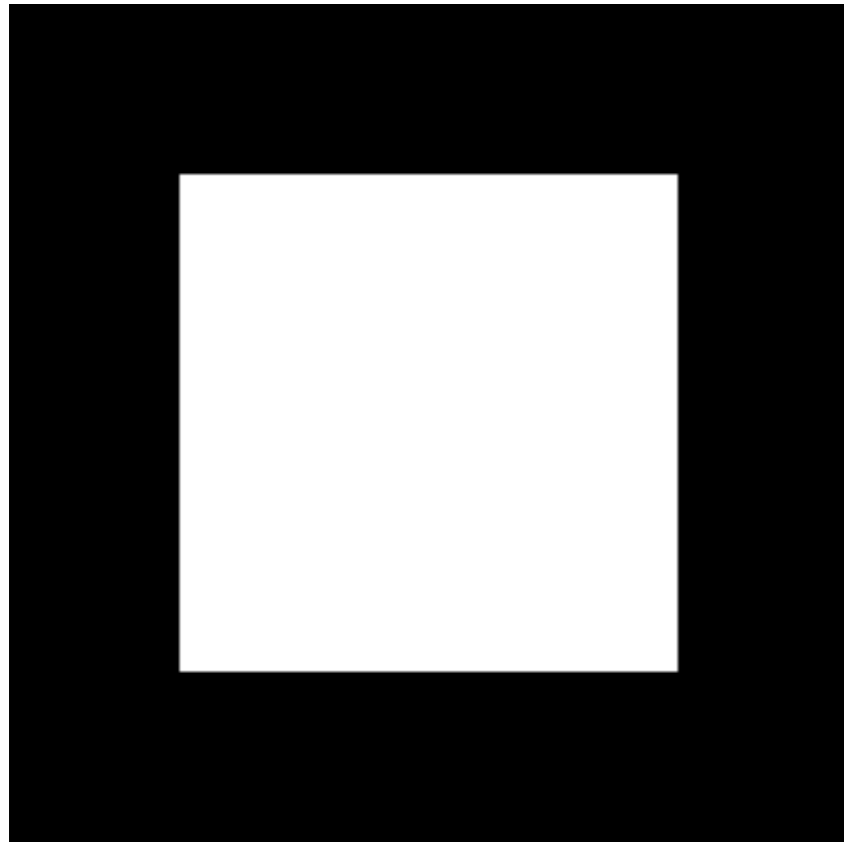
Coefficients a_j



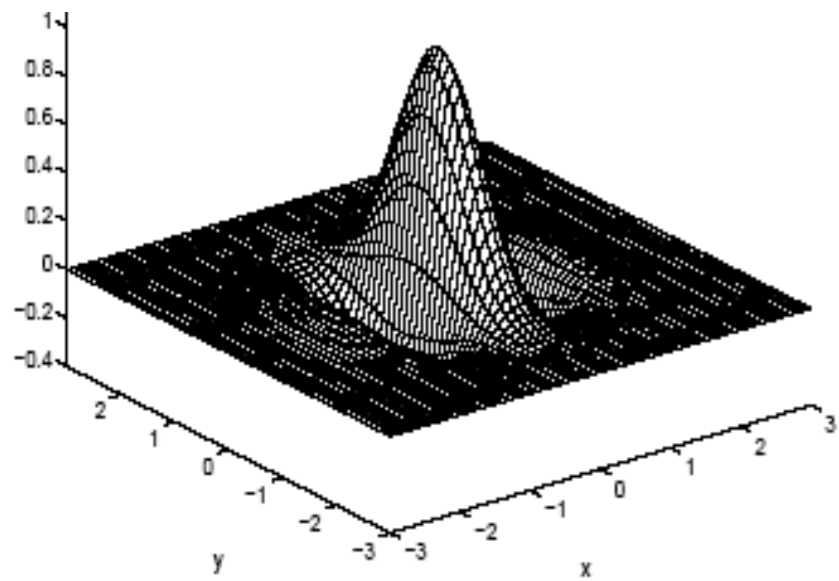
Transform on rows



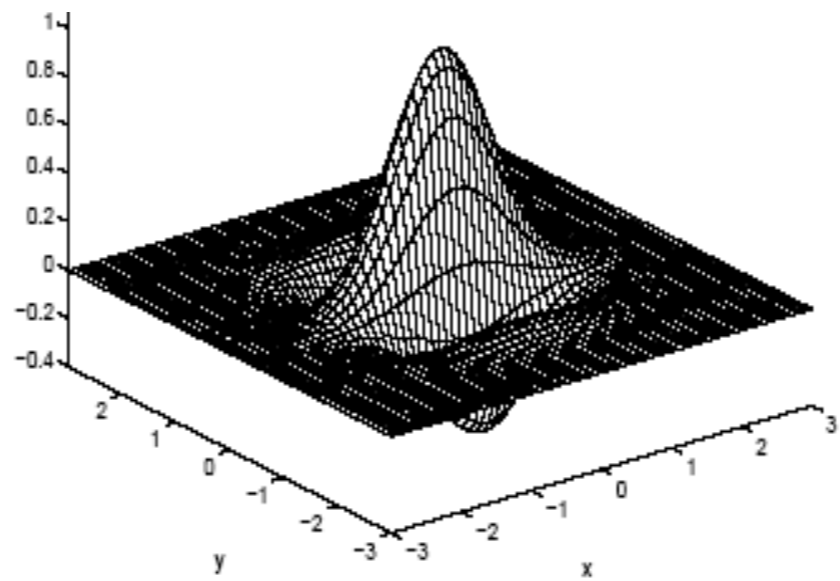
Transform on columns



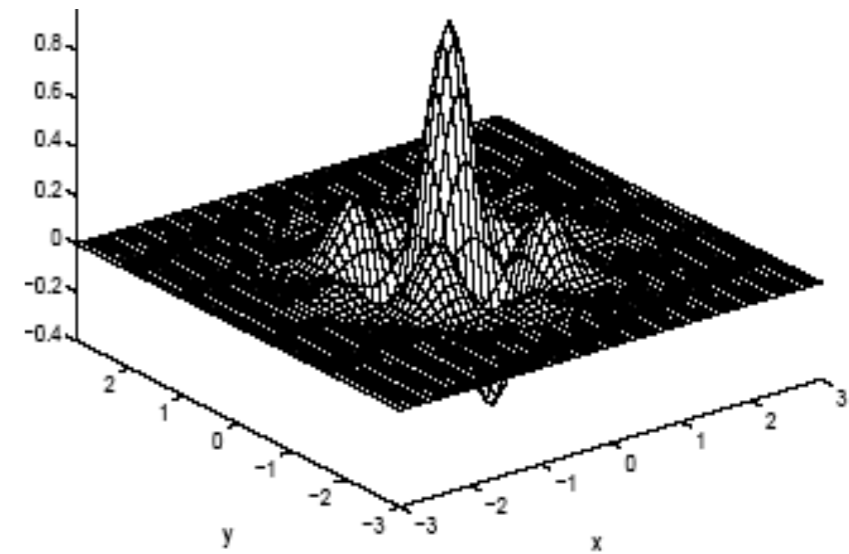
Ondelettes Daubechies 2D horizontal, vertical, diagonal



ψ^H



ψ^V



ψ^D

Histoire des ondelettes et de la multirésolution

- Physique 1971 : décompositions atomiques.
Kenneth Wilson

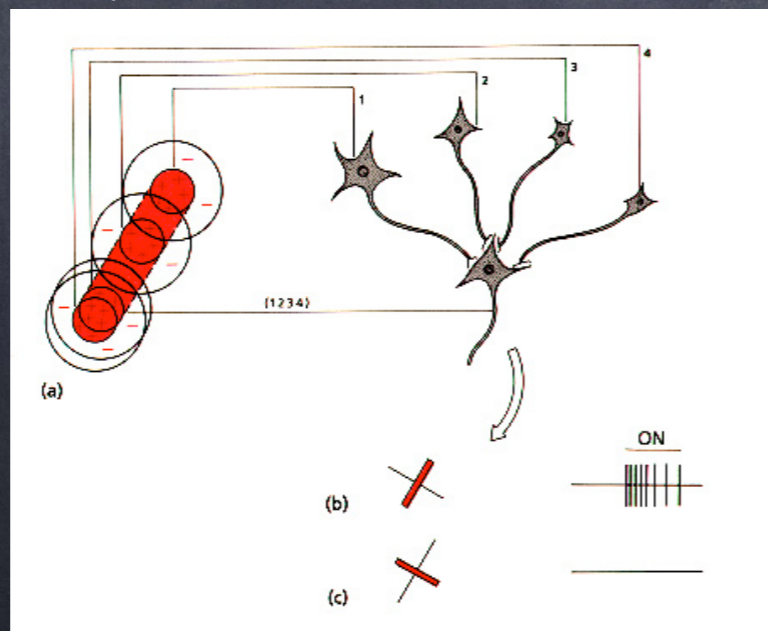
Histoire des ondelettes et de la multirésolution

- Physique 1971 : décompositions atomiques.
Kenneth Wilson
- Physiologie (système visuel) :
fonctions autosimilaires de Gabor
(inspiré des travaux de Hubel & Wiesel)

Histoire des ondelettes et de la multirésolution

- Physique 1971 : décompositions atomiques.
Kenneth Wilson
- Physiologie (système visuel) :
fonctions autosimilaires de Gabor
(inspiré des travaux de Hubel & Wiesel)

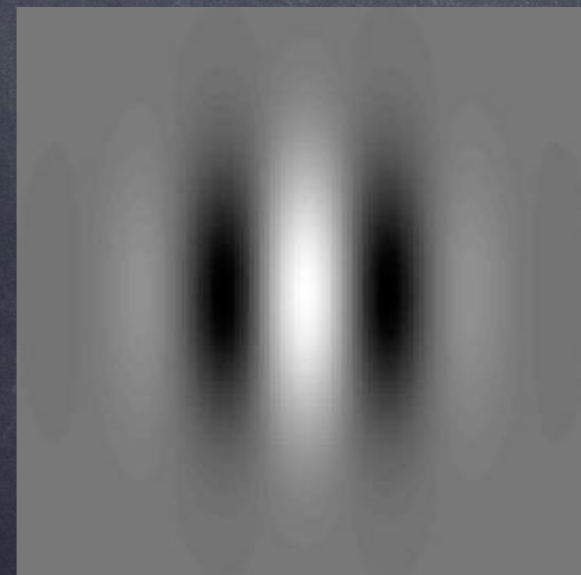
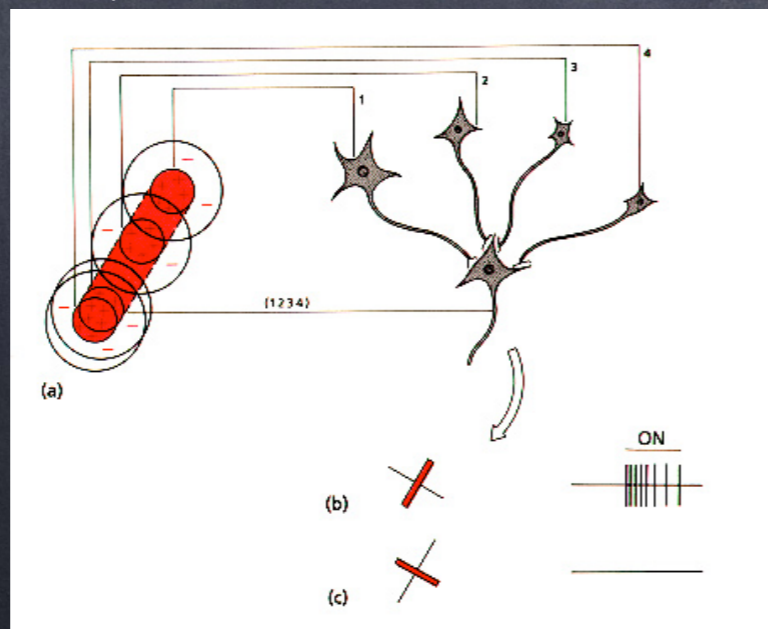
Cellules simples



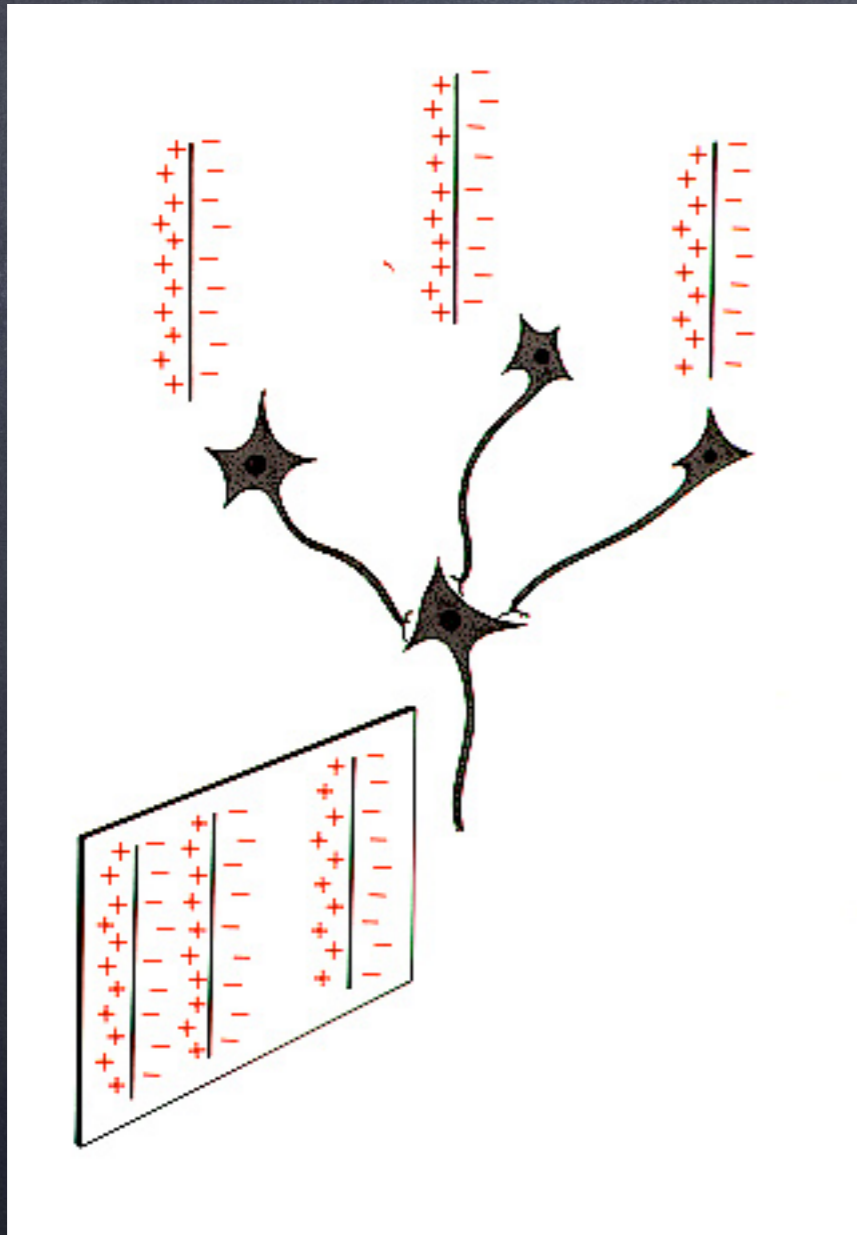
Histoire des ondelettes et de la multirésolution

- Physique 1971 : décompositions atomiques.
Kenneth Wilson
- Physiologie (système visuel) :
fonctions autosimilaires de Gabor
(inspiré des travaux de Hubel & Wiesel)

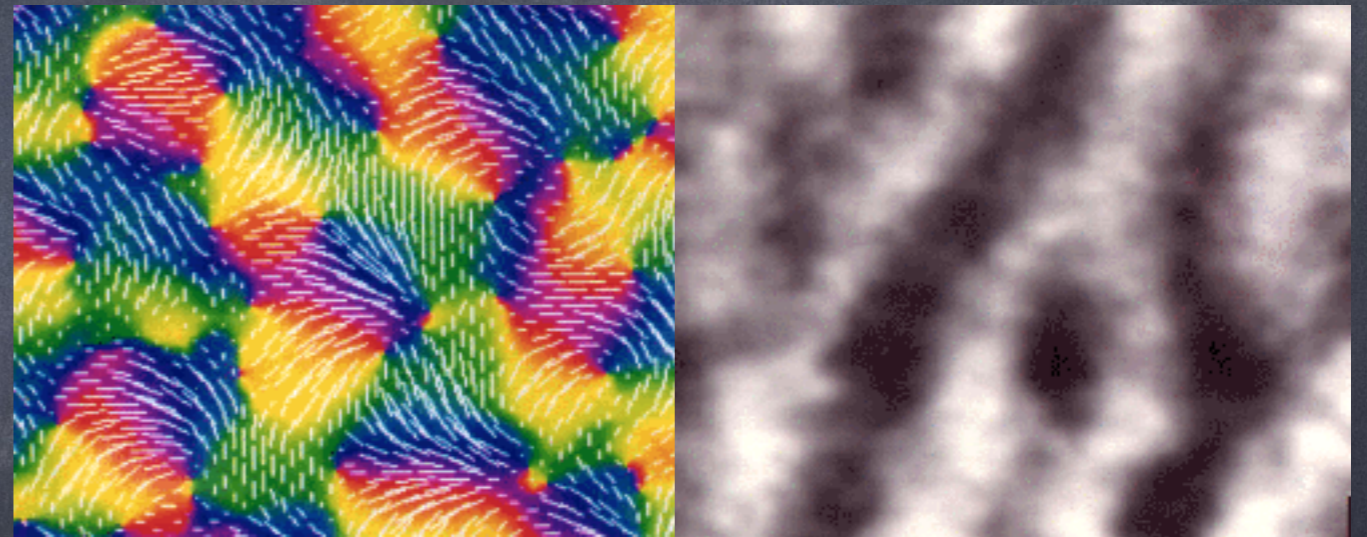
Cellules simples



Hubel & Wiesel



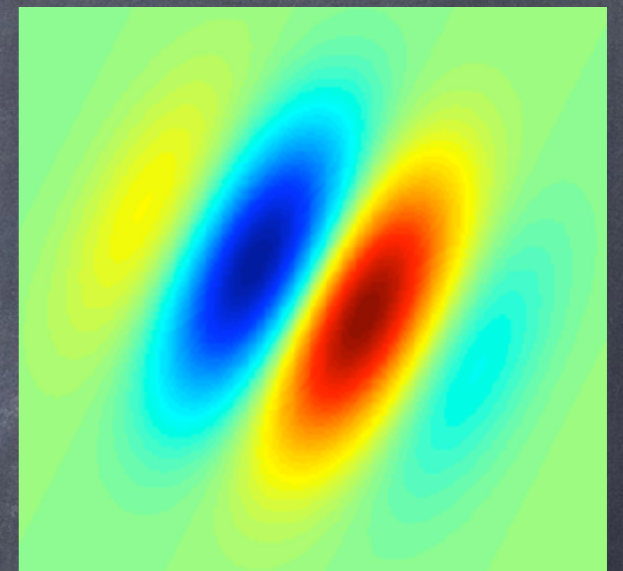
Cellules complexes



Organisation orientationelles
du système visuel

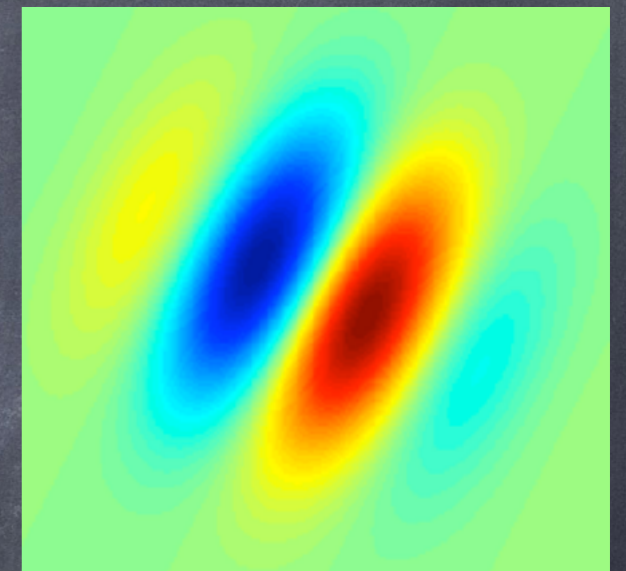
Histoire des ondelettes et de la multirésolution

- Physique 1971 : décompositions atomiques.
Kenneth Wilson
- Physiologie (système visuel) :
fonctions autosimilaires de Gabor



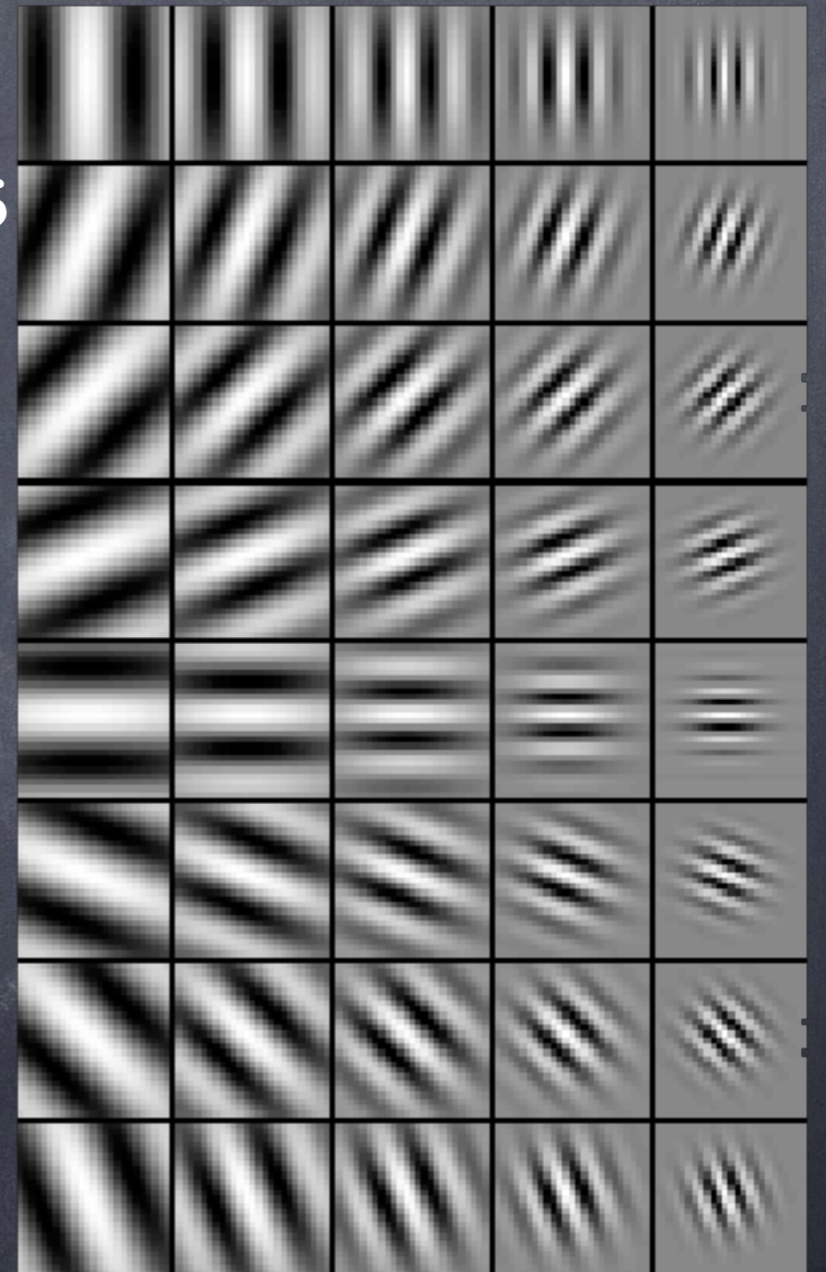
Histoire des ondelettes et de la multirésolution

- Physique 1971 : décompositions atomiques.
Kenneth Wilson
- Physiologie (système visuel) :
fonctions autosimilaires de Gabor
- Géophysique : chercher du pétrole sous la
terre avec des ondelettes (Jean Morlet)
1975. Fenêtre glissante de Gabor.



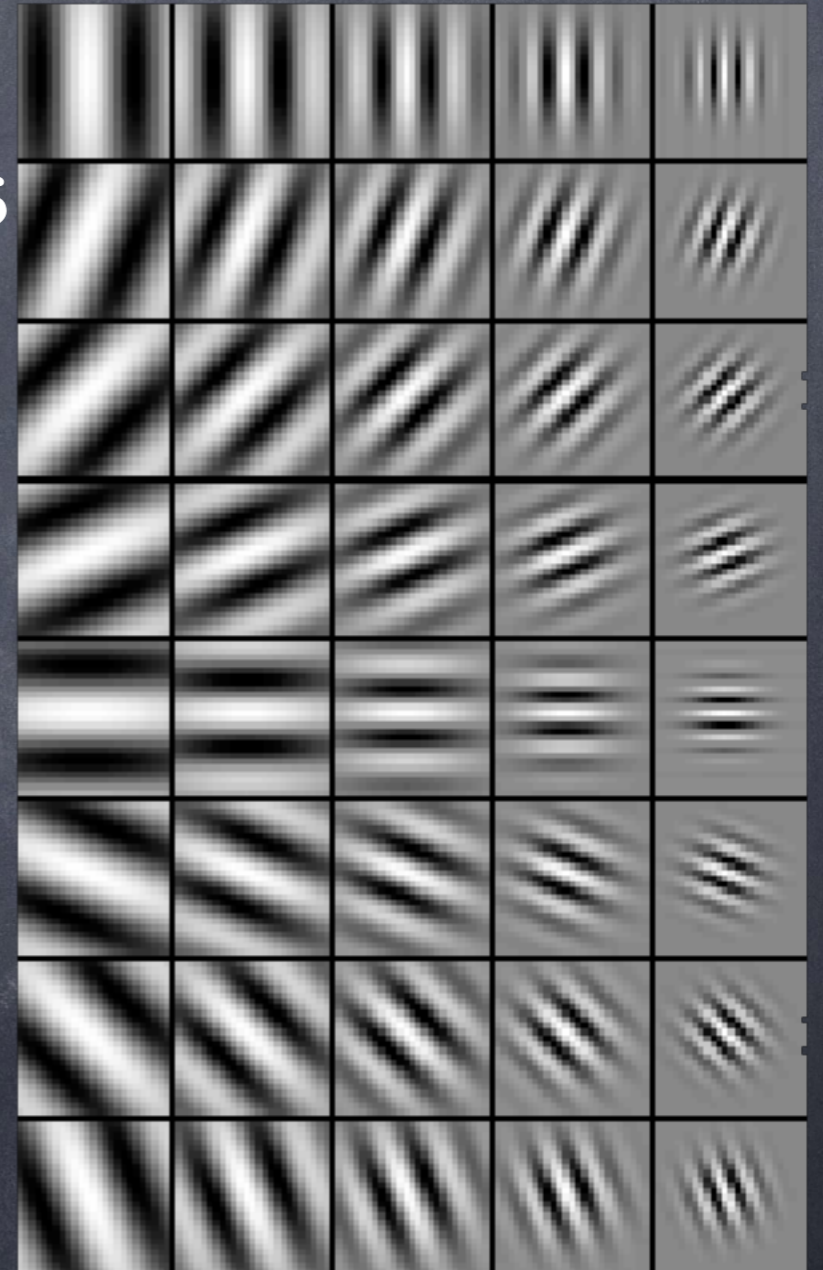
Ondelettes de Morlet

- Laisser le nombre d'oscillations constant



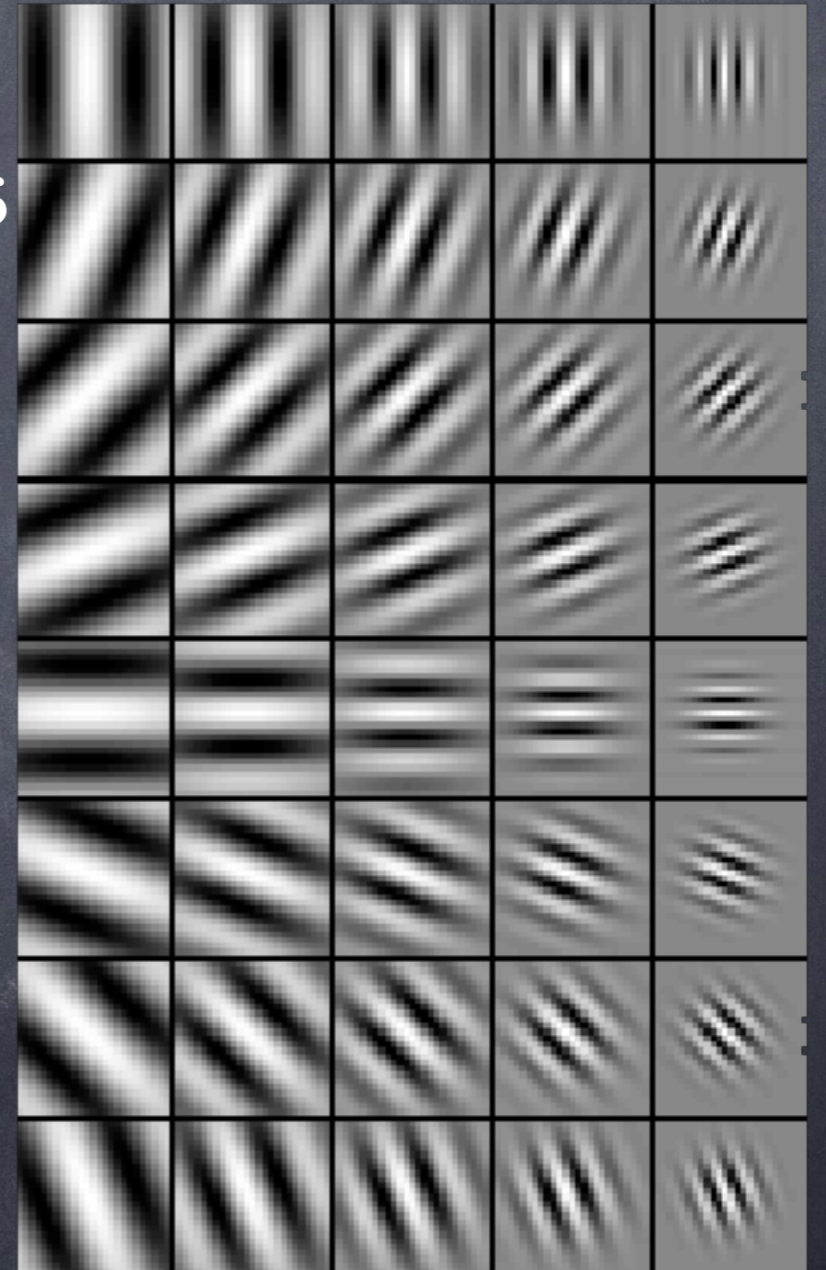
Ondelettes de Morlet

- Laisser le nombre d'oscillations constant
- Changer la taille des fenêtres (étirer et comprimer comme un accordéon)



Ondelettes de Morlet

- Laisser le nombre d'oscillations constant
- Changer la taille des fenêtres (étirer et comprimer comme un accordéon)
- Nom: ondelettes de Gabor ou ondelettes de forme constante



Le microscope mathématique

- Les ondelettes

Ondelettes 1D

- On veut utiliser une fonction (pas de sin/cos) pour estimer n'importe quel signal f

Ondelettes 1D

- On veut utiliser une fonction (pas de sin/cos) pour estimer n'importe quel signal f
- Par construction:

Ondelettes 1D

- On veut utiliser une fonction (pas de sin/cos) pour estimer n'importe quel signal f
- Par construction:
 - Couples de fonctions (père-mère) à support compact (fini) (petit support encore mieux \rightarrow rapide)

Ondelettes 1D

- On veut utiliser une fonction (pas de sin/cos) pour estimer n'importe quel signal f
- Par construction:
 - Couples de fonctions (père-mère) à support compact (fini) (petit support encore mieux \rightarrow rapide)
 - Fonctions généralisables à plusieurs échelles/résolutions pour pouvoir gérer les zones homogènes et les changements abruptes

Ondelettes 1D

- On veut utiliser une fonction (pas de sin/cos) pour estimer n'importe quel signal f
- Par construction:
 - Couples de fonctions (père-mère) à support compact (fini) (petit support encore mieux \rightarrow rapide)
 - Fonctions généralisables à plusieurs échelles/résolutions pour pouvoir gérer les zones homogènes et les changements abruptes
 - Fonctions normalisées, intégrale sous la courbe 1 (conservation d'énergie)

Ondelettes 1D

- On veut utiliser une fonction (pas de sin/cos) pour estimer n'importe quel signal f
- Par construction:
 - Couples de fonctions (père-mère) à support compact (fini) (petit support encore mieux \rightarrow rapide)
 - Fonctions généralisables à plusieurs échelles/résolutions pour pouvoir gérer les zones homogènes et les changements abruptes
 - Fonctions normalisées, intégrale sous la courbe 1 (conservation d'énergie)
 - Orthogonales par rapport à leurs versions translatées

Les ondelettes – microscope mathématique

- Avant Mallat, il n'y avait pas de concept. Tout était construit et fait à la main (Haar, Sinus cardinal, Spline cubique, etc.)

Les ondelettes – microscope mathématique

- Avant Mallat, il n'y avait pas de concept. Tout était construit et fait à la main (Haar, Sinus cardinal, Spline cubique, etc.)
- Les ondelettes analyse le signal en augmentant progressivement l'échelle d'un facteur 2 \rightarrow 2 fois plus d'ondelettes à chaque échelle \rightarrow double la fréquence. Donc, le théorème d'échantillonnage est respecté

Les ondelettes – une drôle de famille

- Père : fonction d'échelle

Les ondelettes – une drôle de famille

- Père : fonction d'échelle
- Mère : Ondelette mère

Les ondelettes – une drôle de famille

- Père : fonction d'échelle
- Mère : Ondelette mère
- Enfants : bébés ondelettes étirés ou comprimés d'un facteur 2 (clones de la mère)

Les ondelettes – une drôle de famille

- Père : fonction d'échelle
- Mère : Ondelette mère
- Enfants : bébés ondelettes étirés ou comprimés d'un facteur 2 (clones de la mère)
- Conclusion : Le père sert à rien dans la reproduction familiale!

Les ondelettes – une drôle de famille

- Père : fonction d'échelle
- Mère : Ondelette mère
- Enfants : bébés ondelettes étirés ou comprimés d'un facteur 2 (clones de la mère)
- Conclusion : Le père sert à rien dans la reproduction familiale!
- Reproduction amibes:
"Les amibes sont des protozoaires de l'environnement ; leur reproduction est asexuée par fission binaire."



Ondelettes "sans ondelettes"

- En pratique, pas besoin de père ou de mère!

Ondelettes

"sans ondelettes"

- En pratique, pas besoin de père ou de mère!
- Besoin que du filtre passe-bas h

Ondelettes

"sans ondelettes"

- En pratique, pas besoin de père ou de mère!
- Besoin que du filtre passe-bas h
- À chaque échelle,

Ondelettes

"sans ondelettes"

- En pratique, pas besoin de père ou de mère!
- Besoin que du filtre passe-bas h
- À chaque échelle,
 - filtre passe-bas forme une représentation grossière du signal

Ondelettes

“sans ondelettes”

- En pratique, pas besoin de père ou de mère!
- Besoin que du filtre passe-bas h
- À chaque échelle,
 - filtre passe-bas forme une représentation grossière du signal
 - filtre passe-haut forme une représentation détaillée du signal

Ondelettes

- Le père (fonction d'échelle) sert quand même à quelque chose

Ondelettes

- Le père (fonction d'échelle) sert quand même à quelque chose
 - Déterminez les propriétés de la transformation

Ondelettes

- Le père (fonction d'échelle) sert quand même à quelque chose
 - Déterminez les propriétés de la transformation
 - Accélérez les calculs

Ondelettes

- Le père (fonction d'échelle) sert quand même à quelque chose
 - Déterminez les propriétés de la transformation
 - Accélérez les calculs
- La transformée en ondelettes d'un signal de taille N demande le calcul de $O(N)$ coefficients