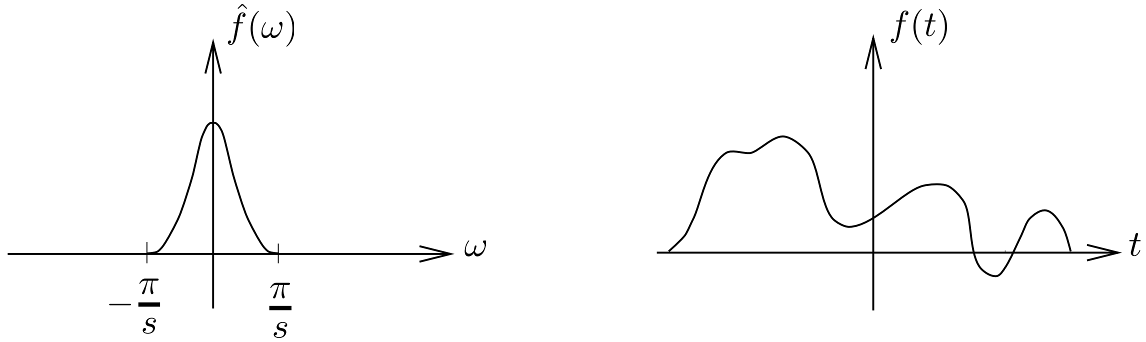
IMN-359

Cours

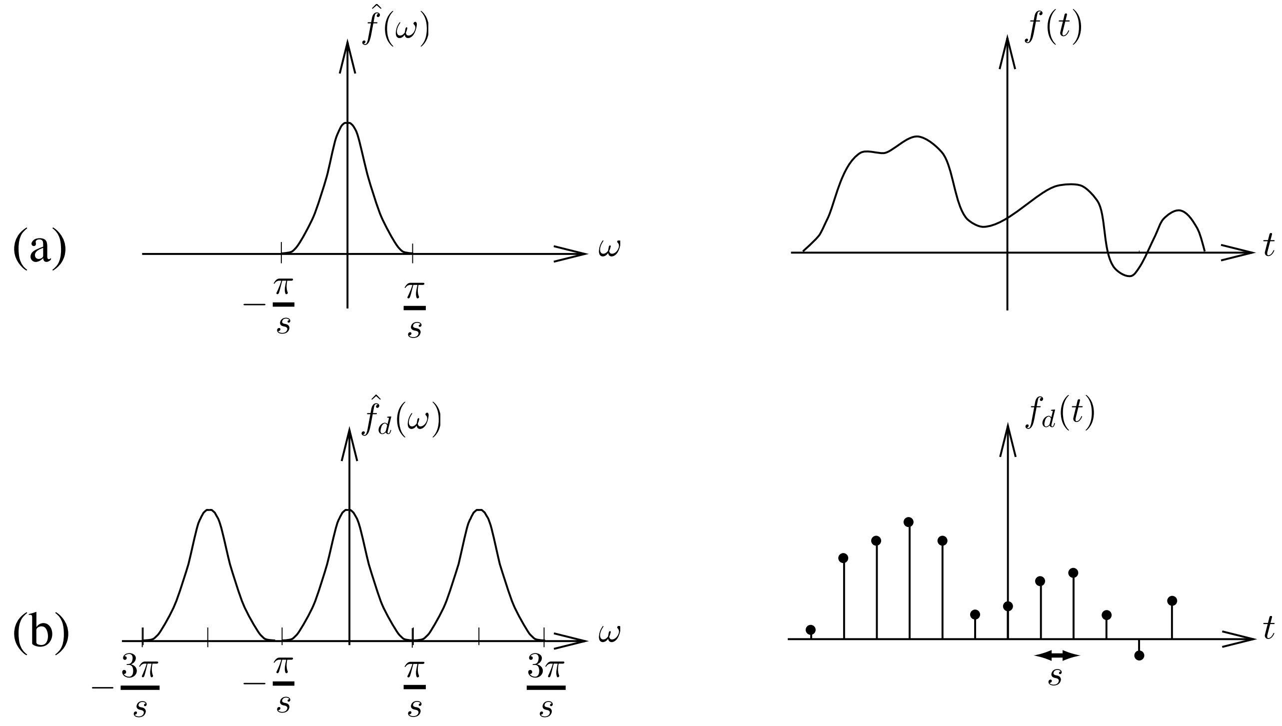
Limites de Fourier

Échantillonnage

(a)

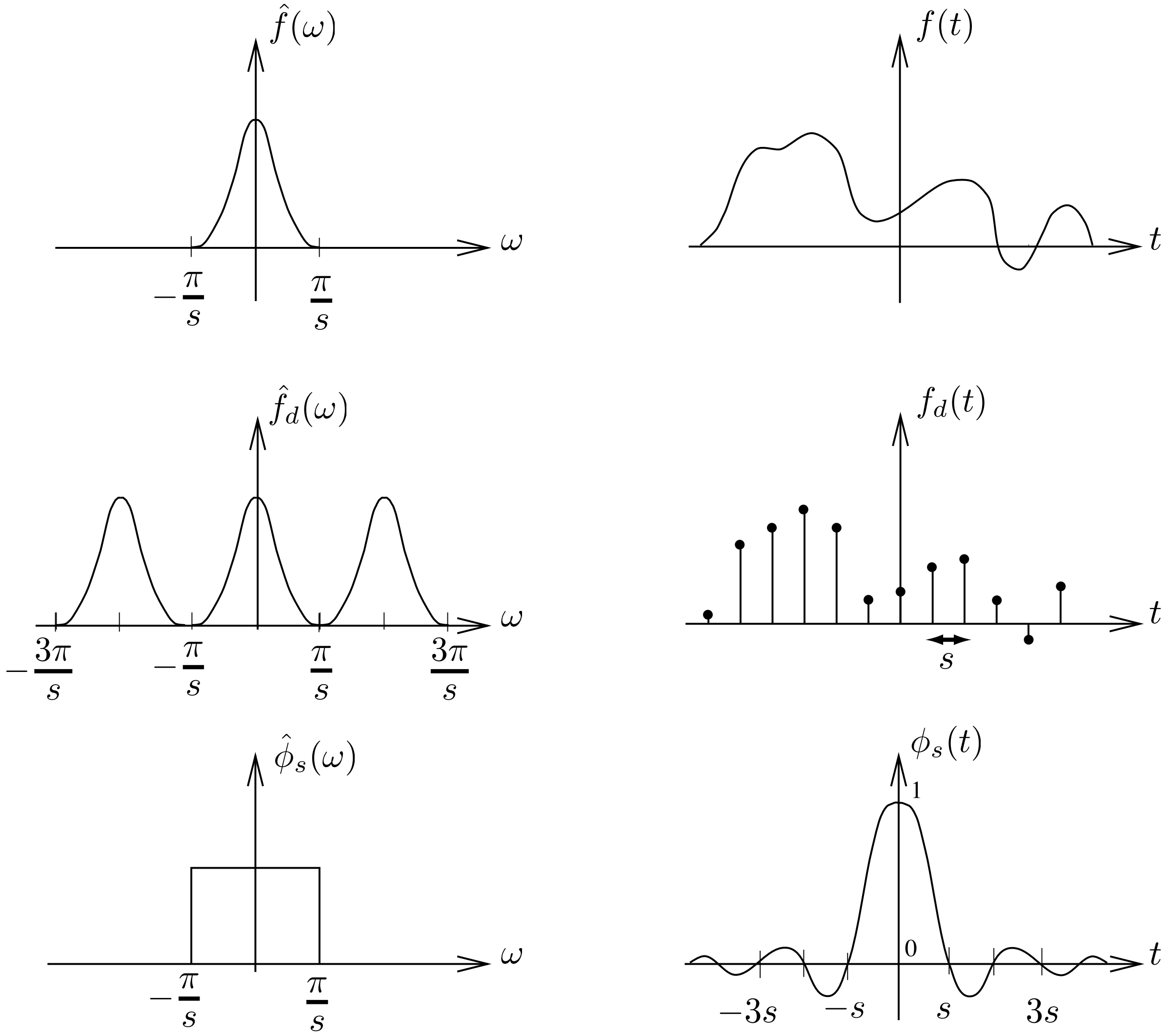


Échantillonnage

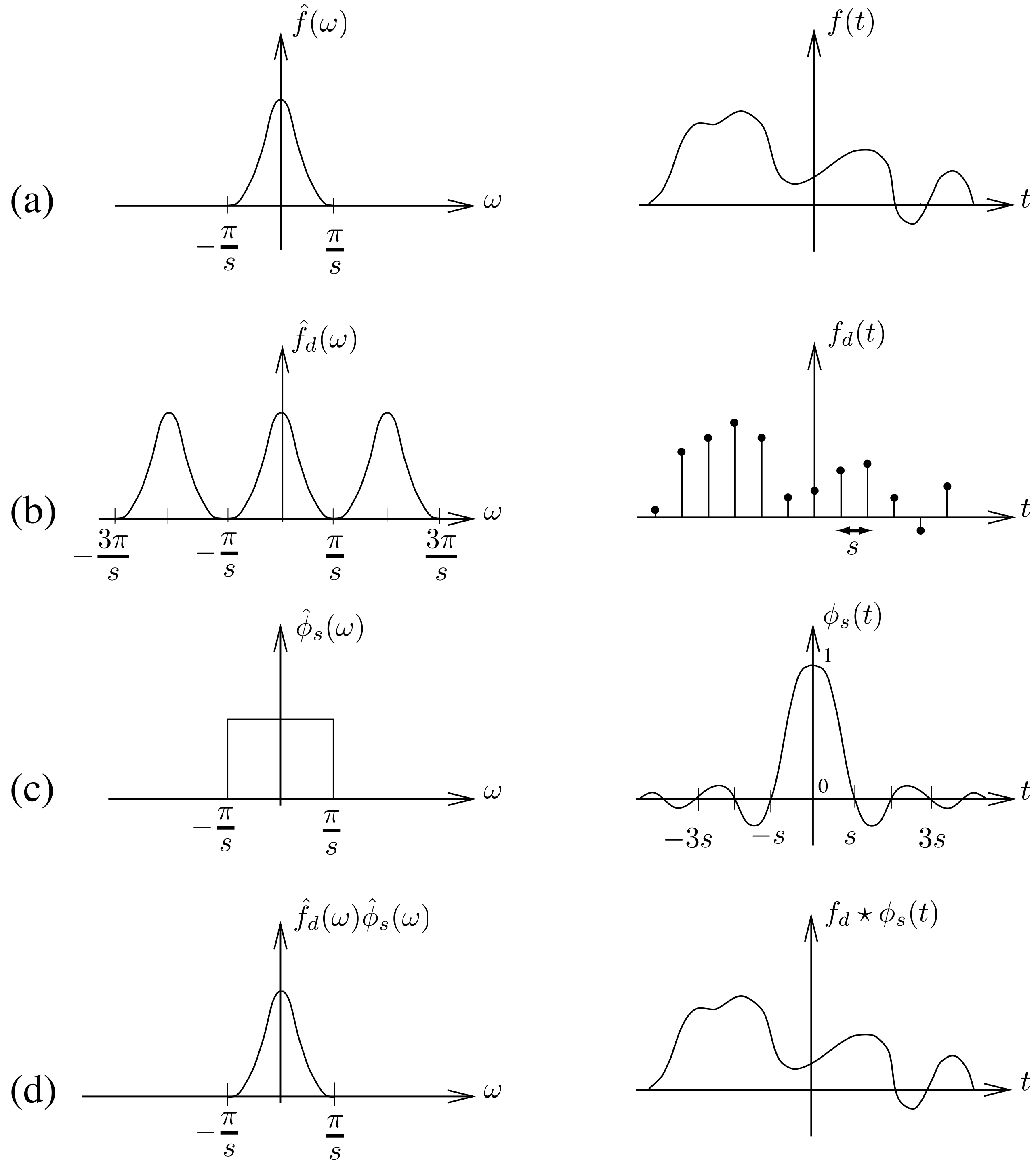


Échantillonnage

(a)
(b)
(c)

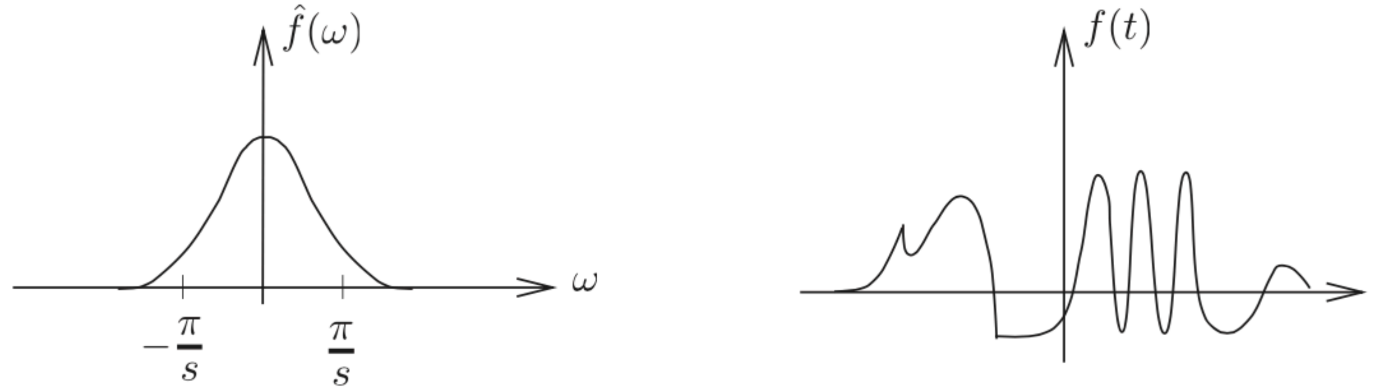


Échantillonnage

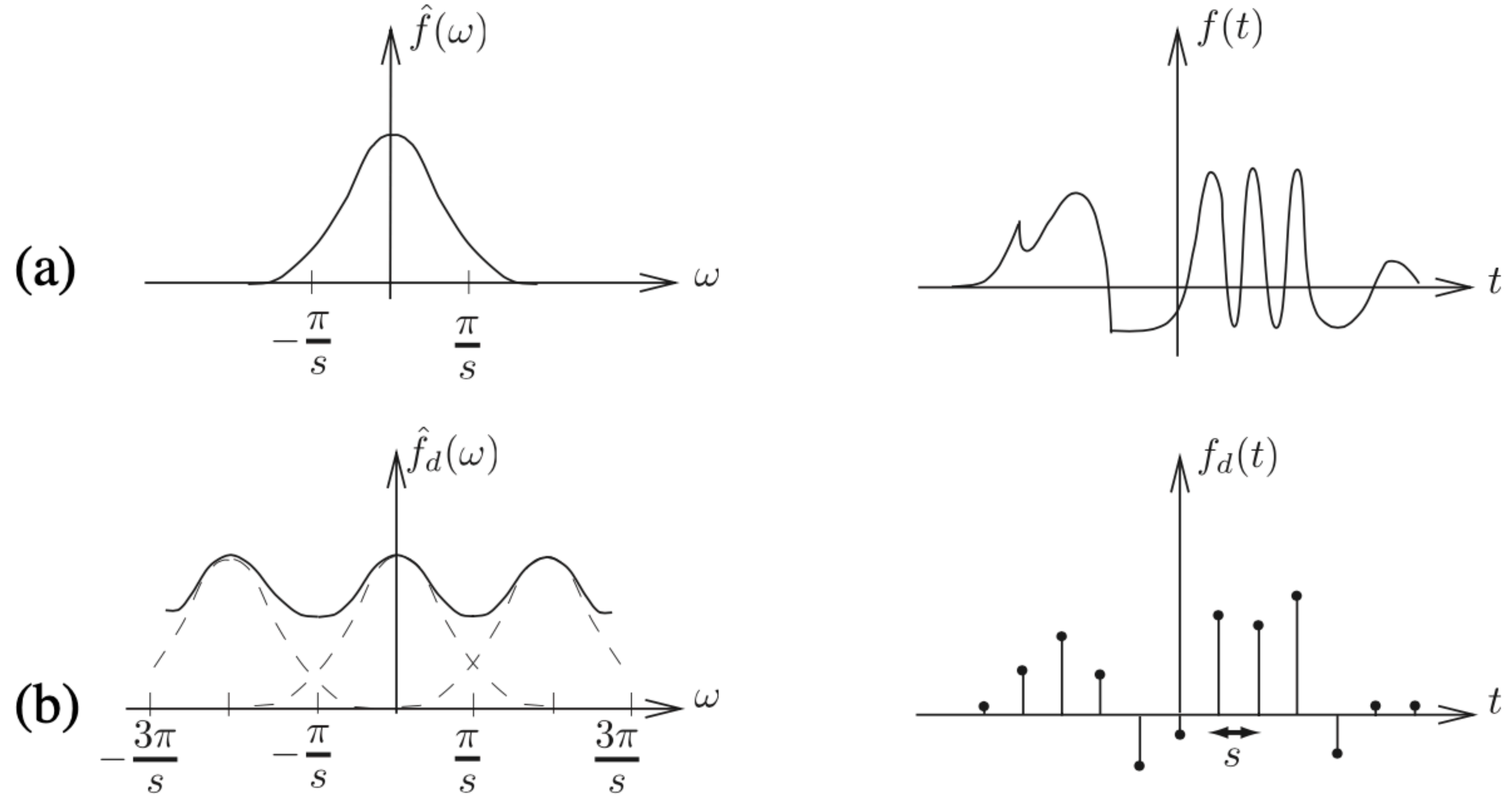


Échantillonnage

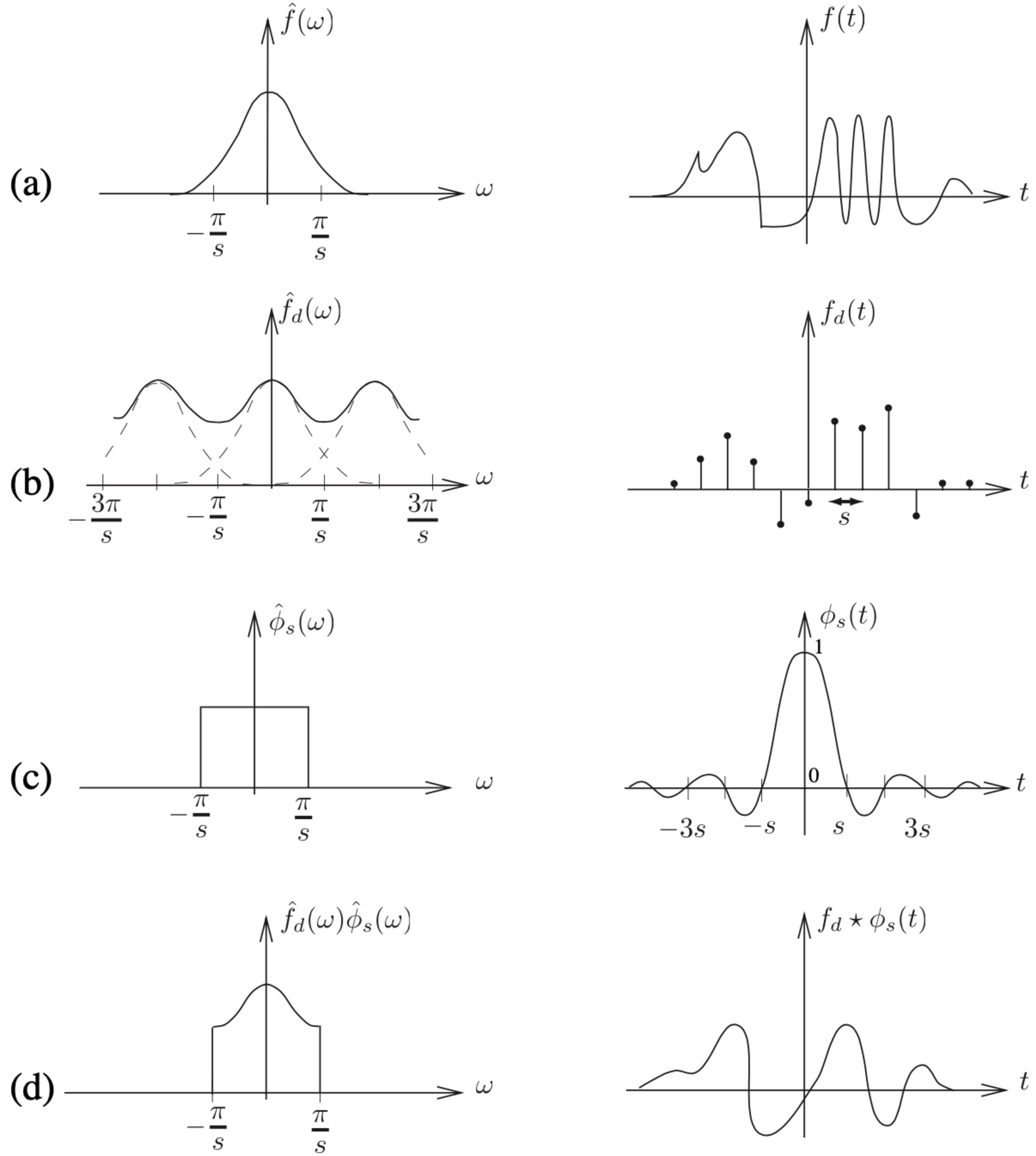
(a)



Échantillonnage



Échantillonnage



Thm d'échantillonnage

- La bande fréquences (f_b = 1/ts) qui délimitent le signal dépend de l'échantillonnage (ts)
  linspace(-2pi, 2pi, 1000) vs linspace(-2pi, 2pi, 100)

- Le signal doit être contenu dans le monde des fréquences entre -f_b/2 et f_b/2
  (piece-regular entre 0 et 1 avec 1024 points a son contenu fréquenciel entre -512 et 512)

Thm d'échantillonnage

- Donc, tant que le signal est échantillonné à f_max*2 (avec au moins f_max*2 + 1 points), il n'y aura pas de problèmes de recouvrement dans Fourier (f_max est la fréquence max du signal à reconstruire… qu'on ne sait pas en pratique)
- Cette fréquence critique s'appelle la fréquence de Shannon (europe) ou Nyquist (amérique)
  f_nyquist = 2 * f_max

Thm d'échantillonnage

- Si Nyquist/Shannon non-respecté, on a du repliement dans Fourier. Les hautes fréquences du signal se replient et viennent contaminer les basses fréquences

  (démo07, si on a un signal avec des cos à 3 et 8 Hz dedans mais qu'on échantillonne à 5Hz, les hautes fréquences de 8Hz se replient à 2Hz dans Fourier)

Problème d'échantillonnage

- Repliement
- Artéfactes de géométriques
- Bruit
- Interférences

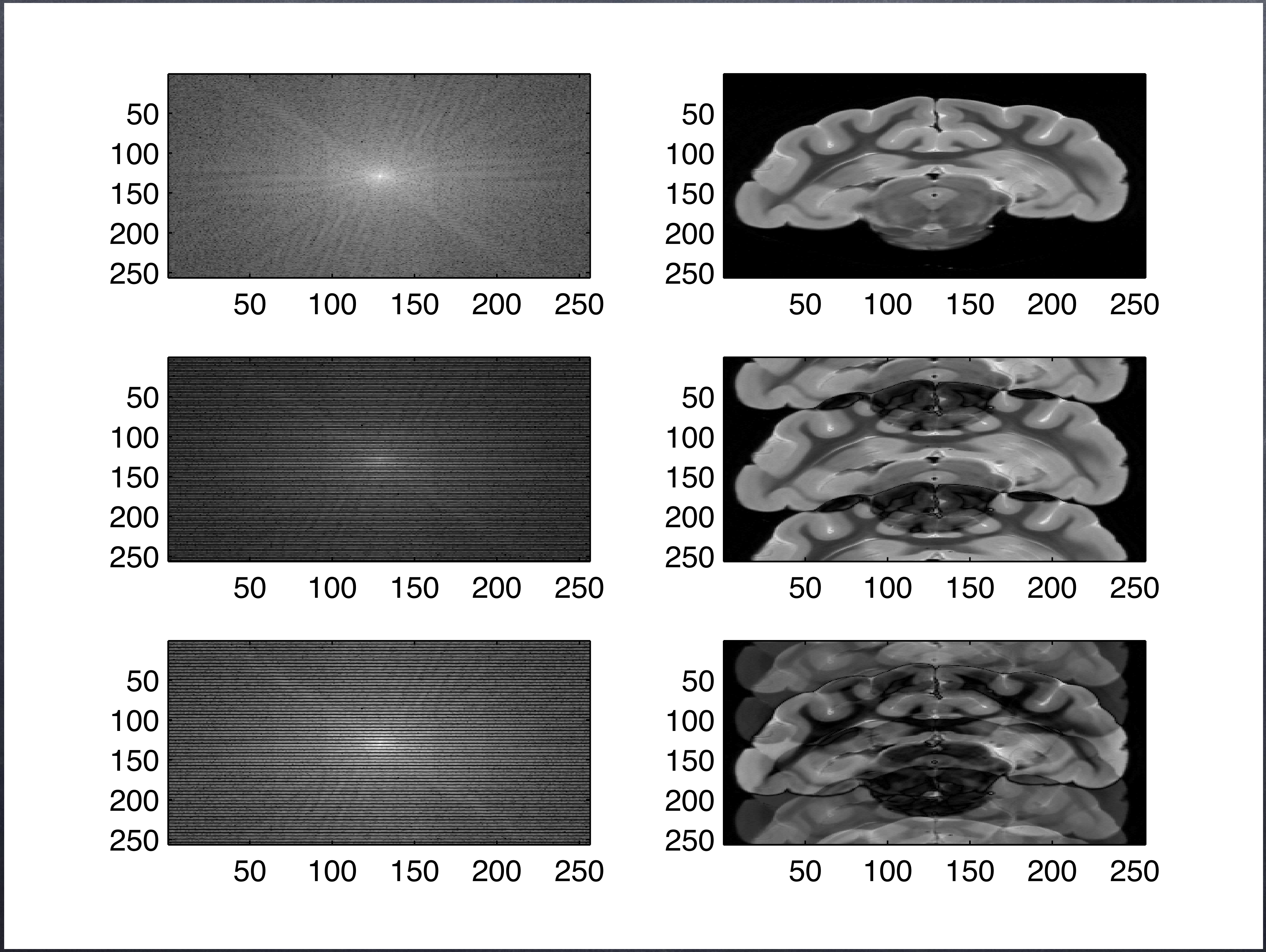
Solutions TP3

- Convolution
- Théorème de convolution
- Conservation d'énergie
- Filtrage passe-bas
- Zero-padding (interpolation linéaire)
- Échantillonnage

Problème d'échantillonnage

- Repliement
- Artéfactes de géométriques
- Bruit
- Interférences

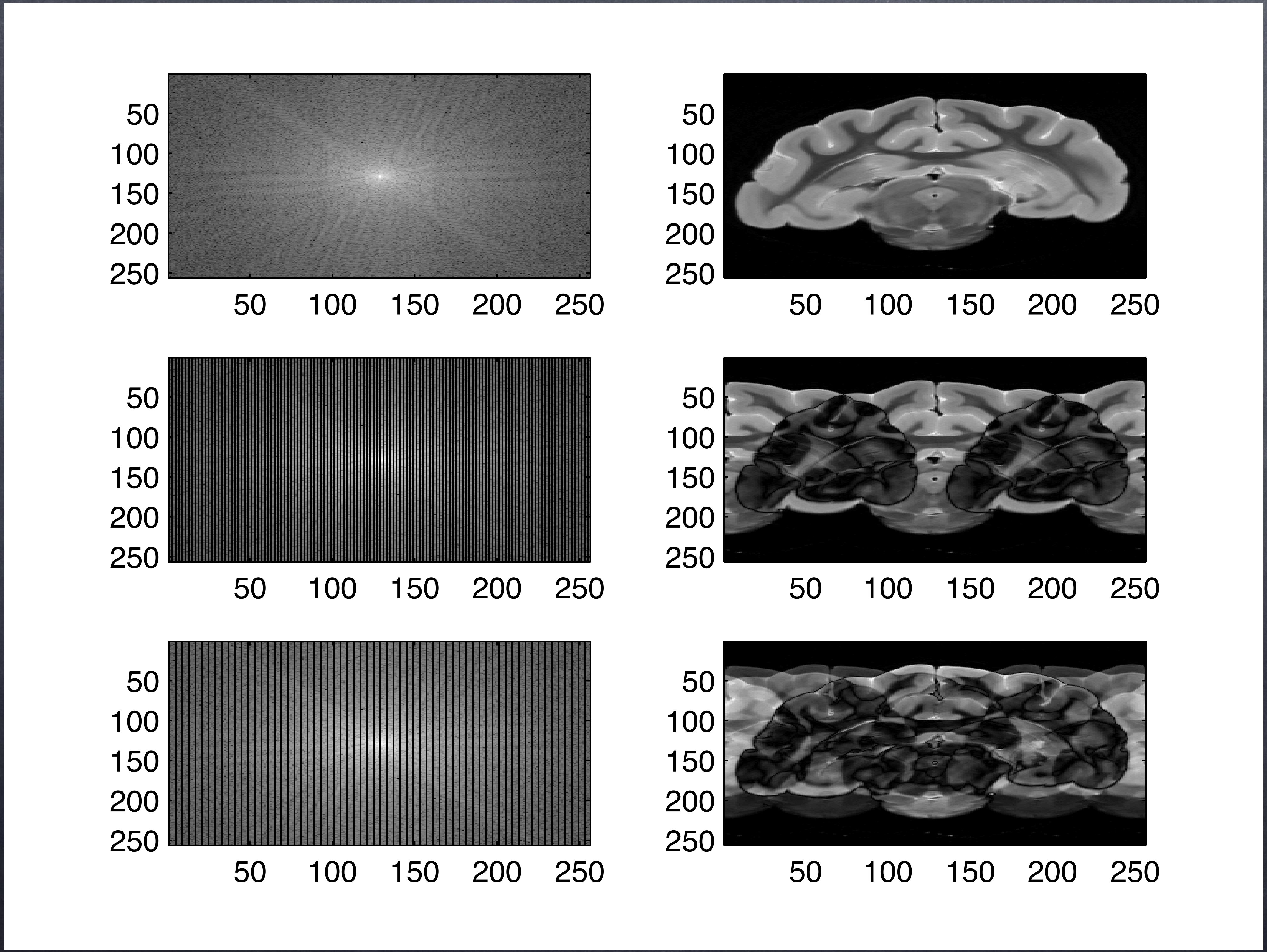
Repliements horizontaux



50%

25%

Repliements verticaux



50%

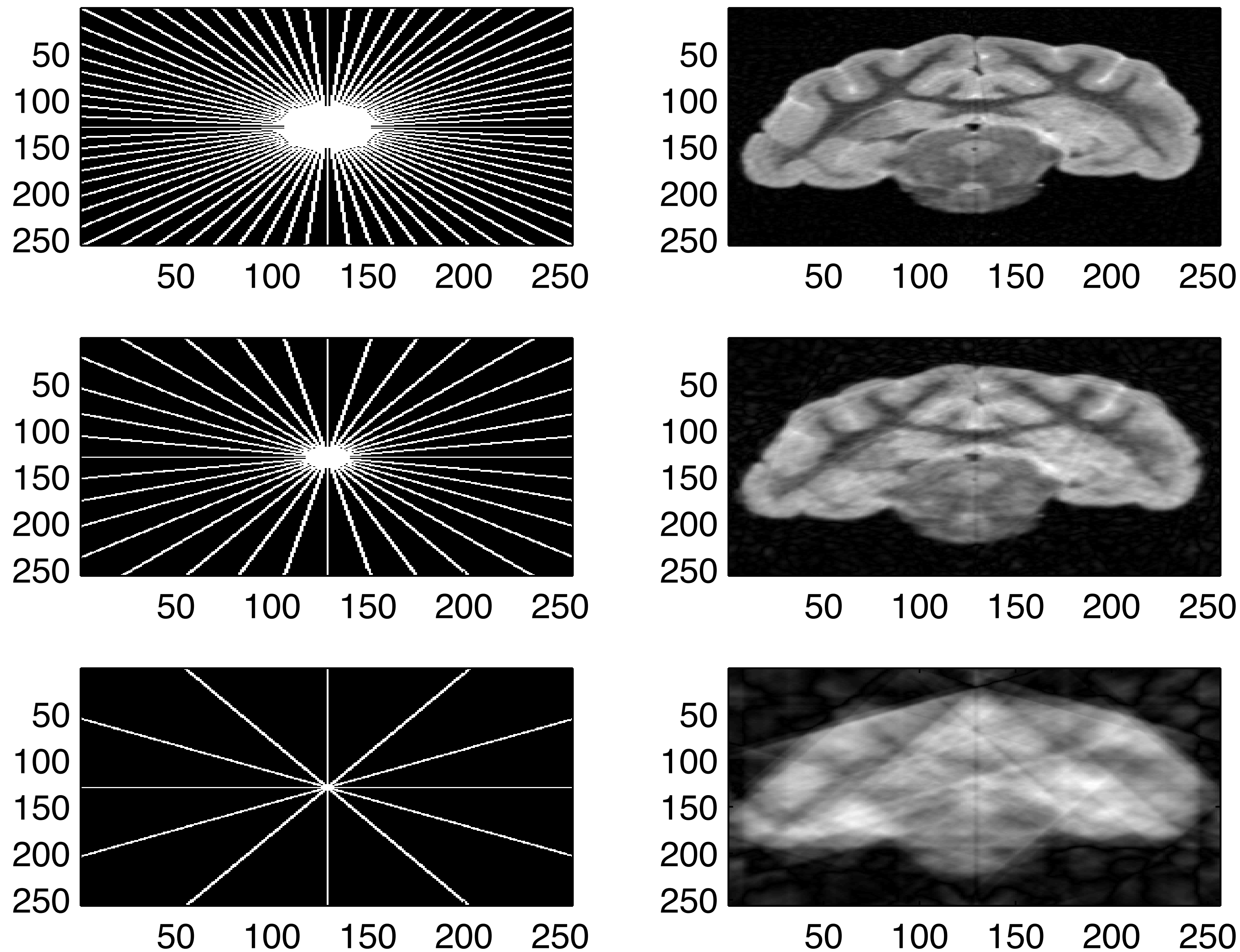
25%

Artéfactes radiales

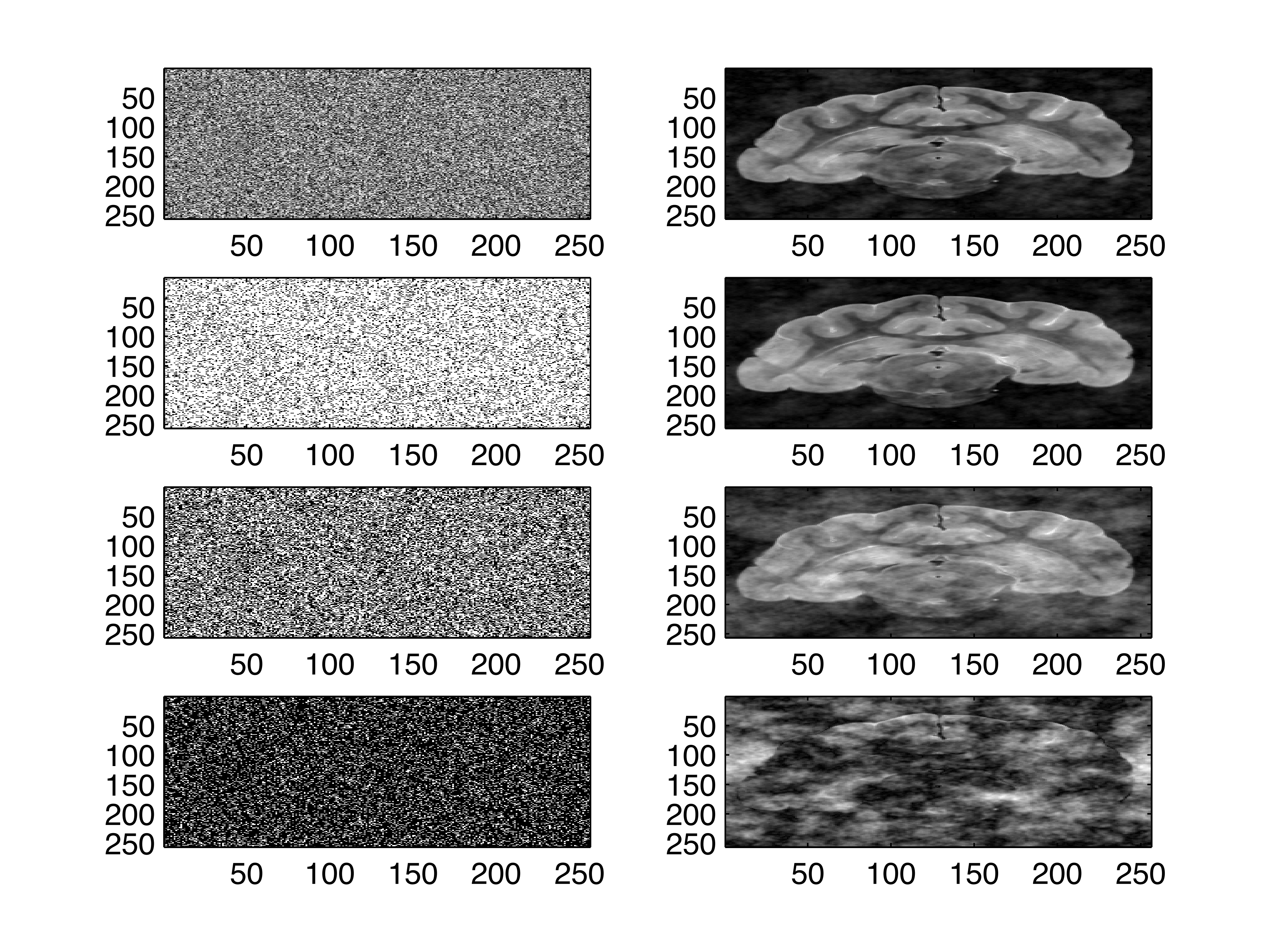
36 rayons

18 rayons

6 rayons



Artéfactes mouchetés

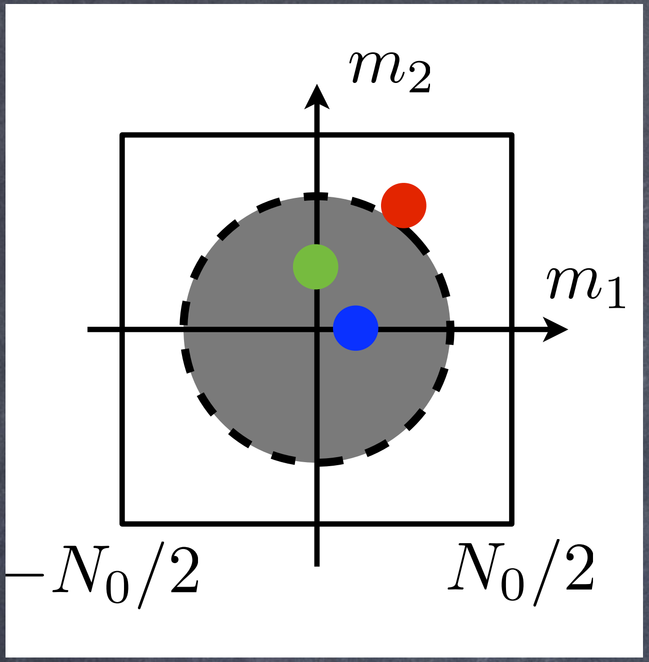


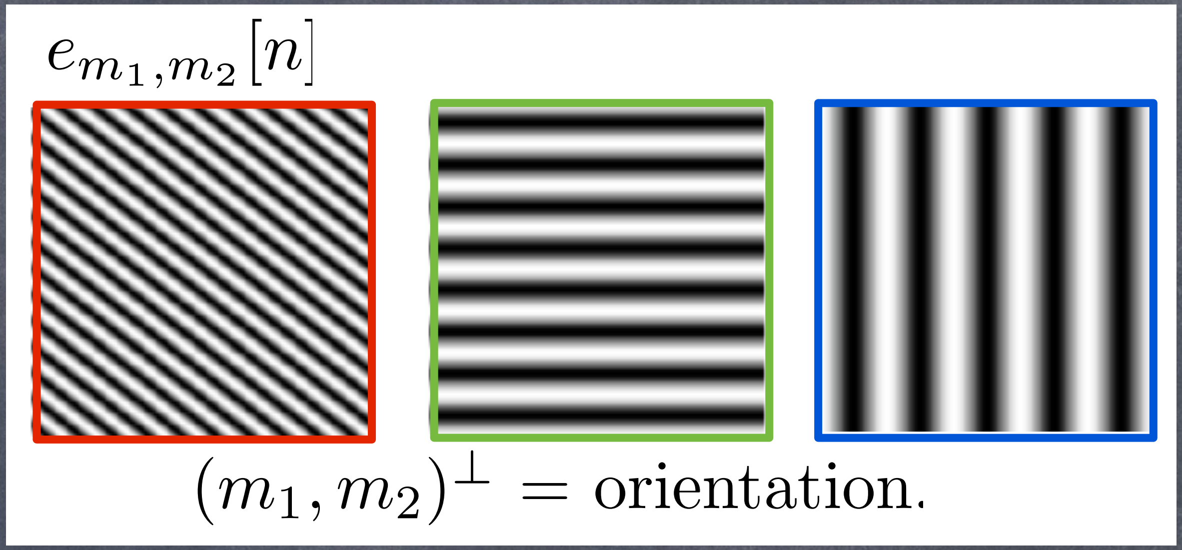
80%

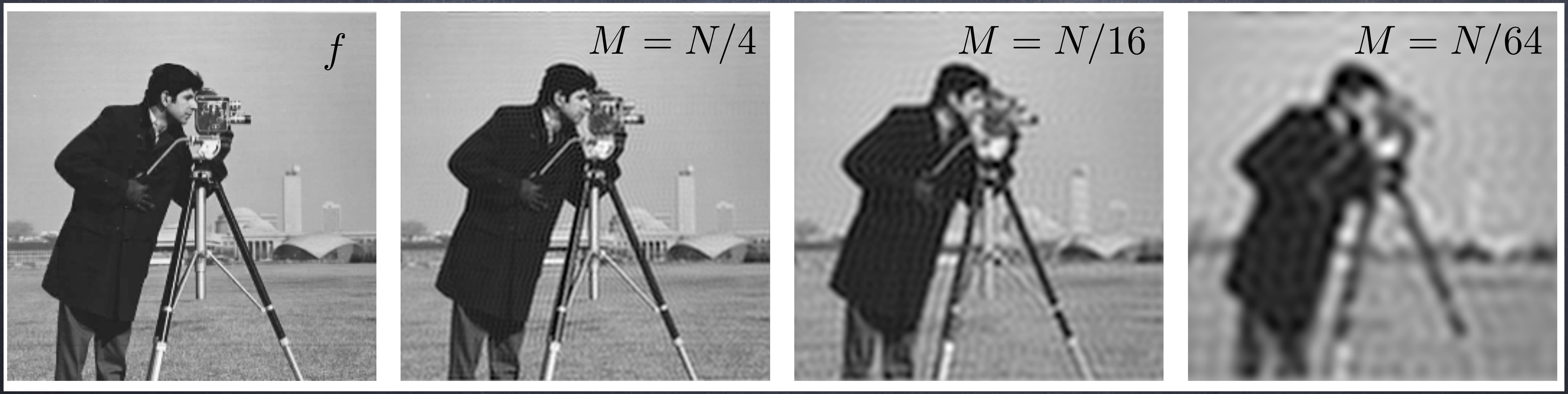
50%

20%

Fourier & discontinuities





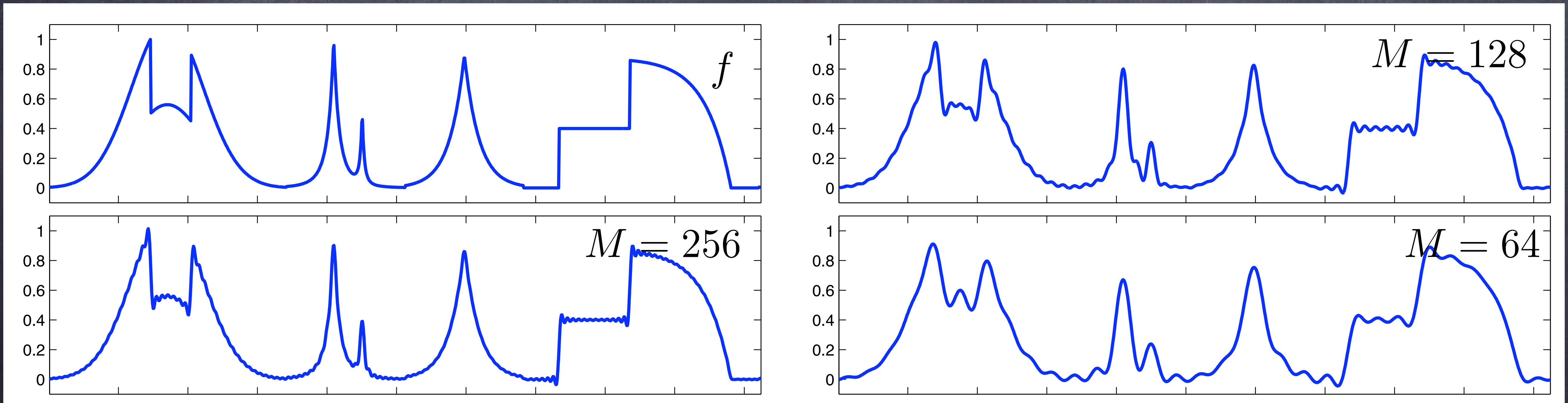


[Peyré, Numerical Tour of Signal Processing]

Fourier & discontinuities

Linear Fourier approximation:

$$f_M = \sum_{m=-M/2}^{M/2} \langle f, e_m \rangle e_m$$

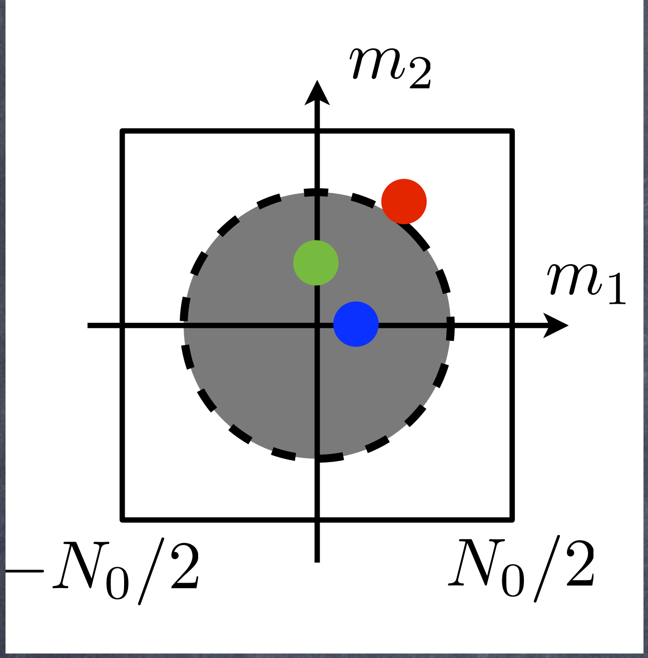


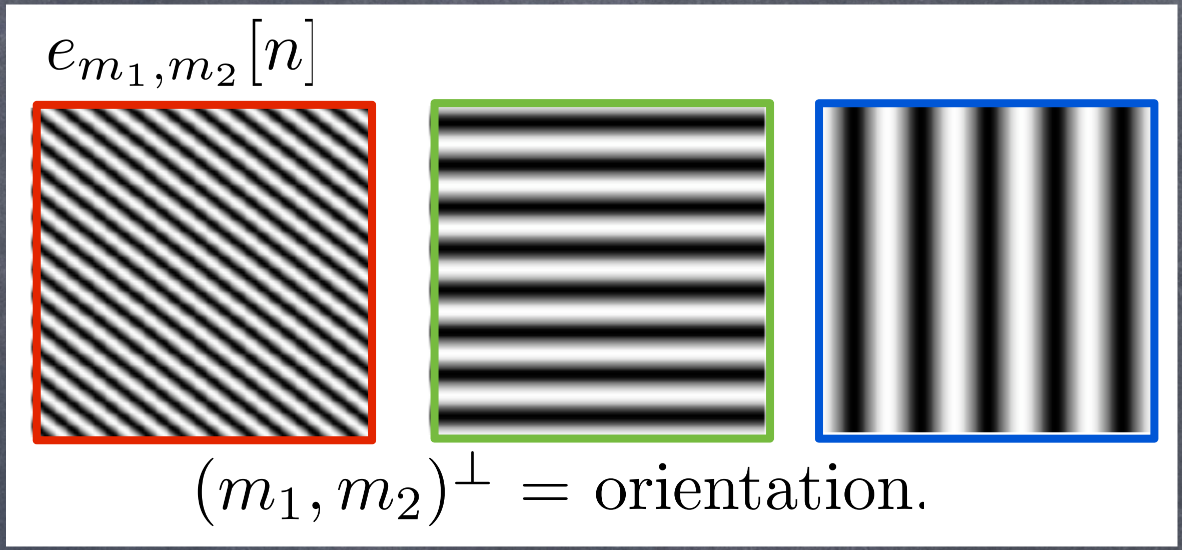
Step singularity: Gibbs oscillations.

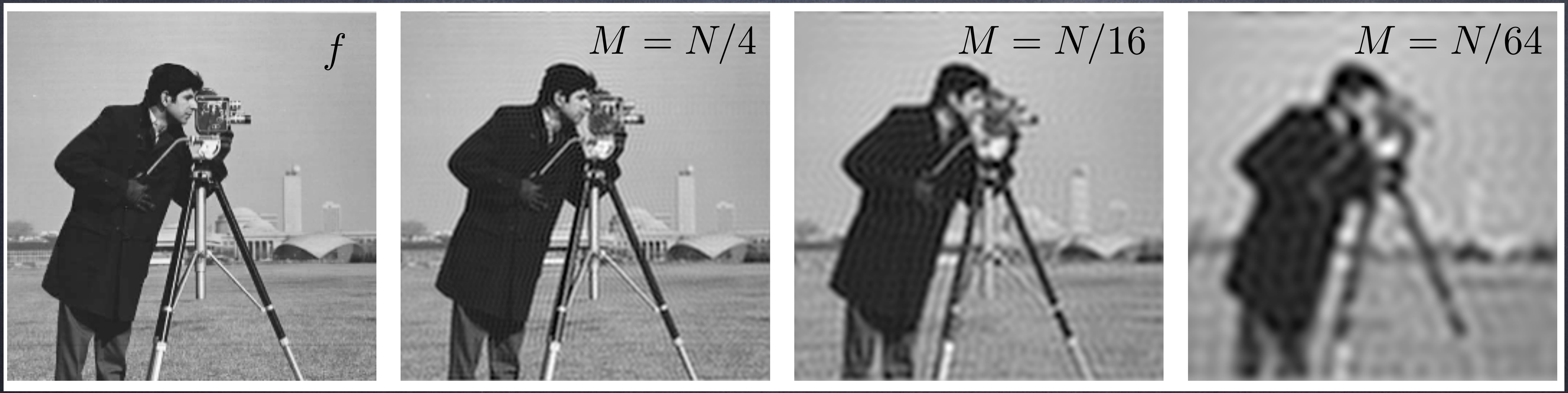
[Peyré, Numerical Tour of Signal Processing]

Smooth C^α signals: $\|f - f_M\|$ decays fast.

Fourier & discontinuities





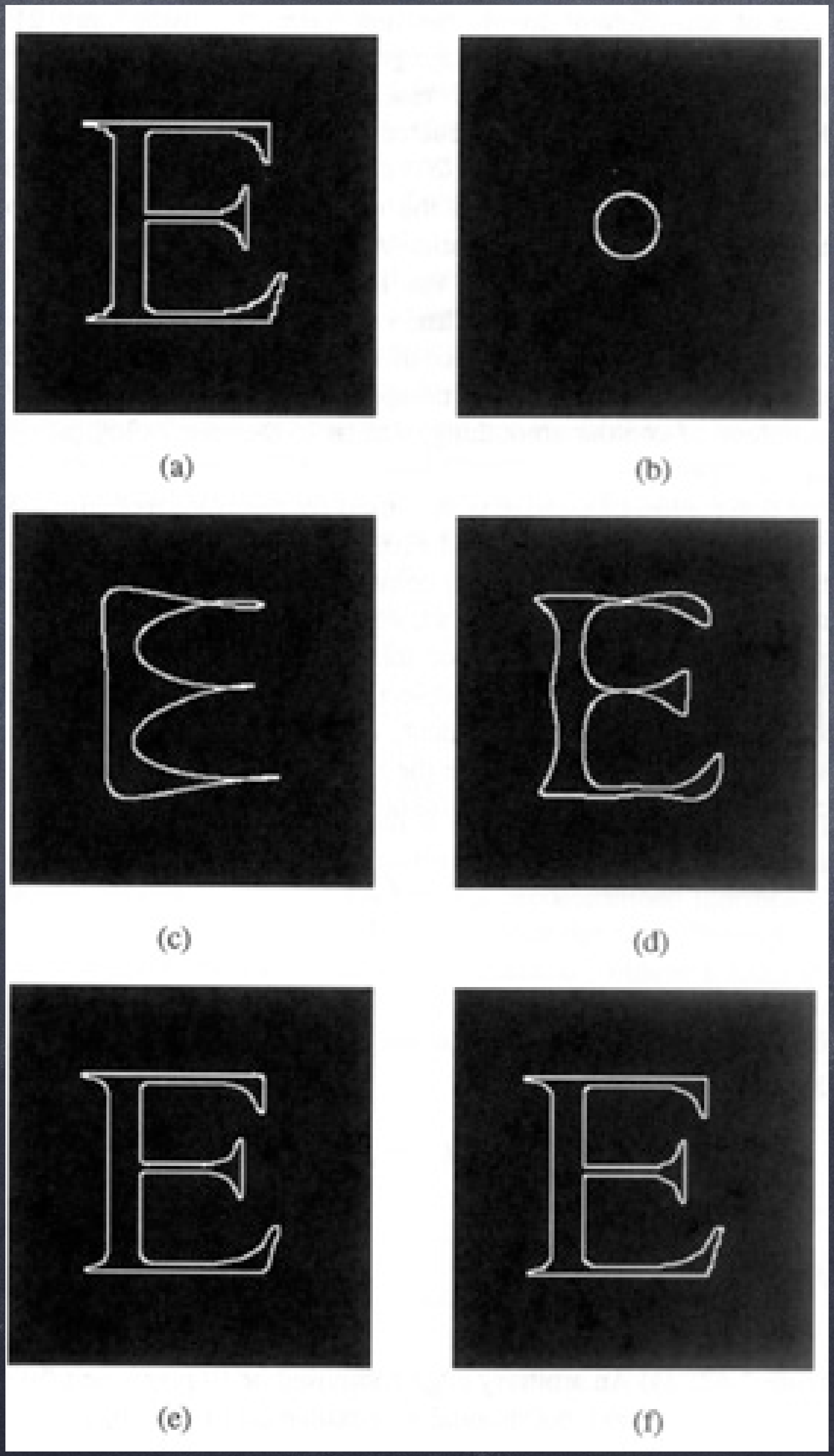


[Peyré, Numerical Tour of Signal Processing]

D'autres exemples

Image 1024x1024
(~ 10^6 pixels)

3 coeffs de Fourier



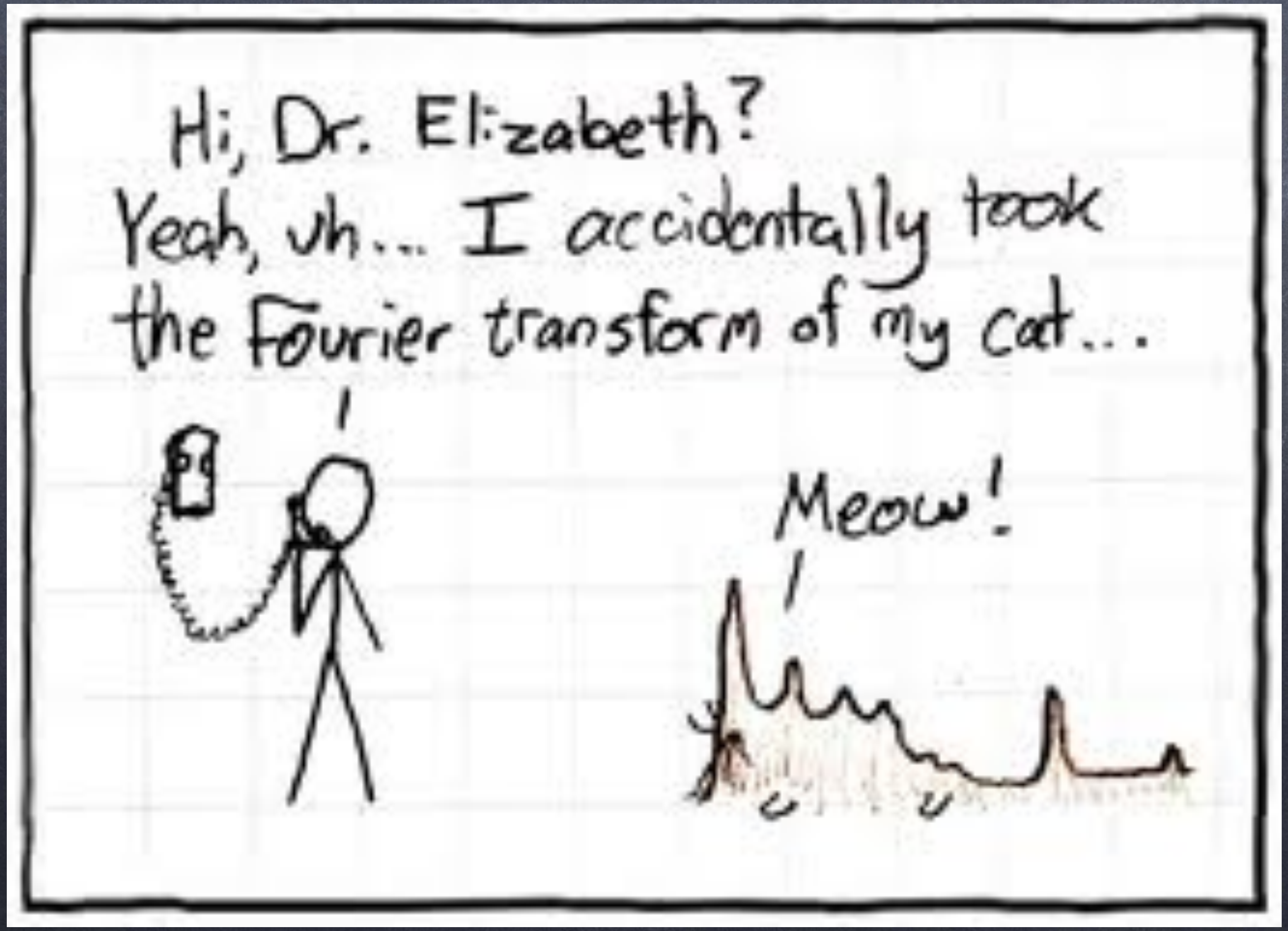
21 coeffs de Fourier

61 coeffs de Fourier

201 coeffs de Fourier

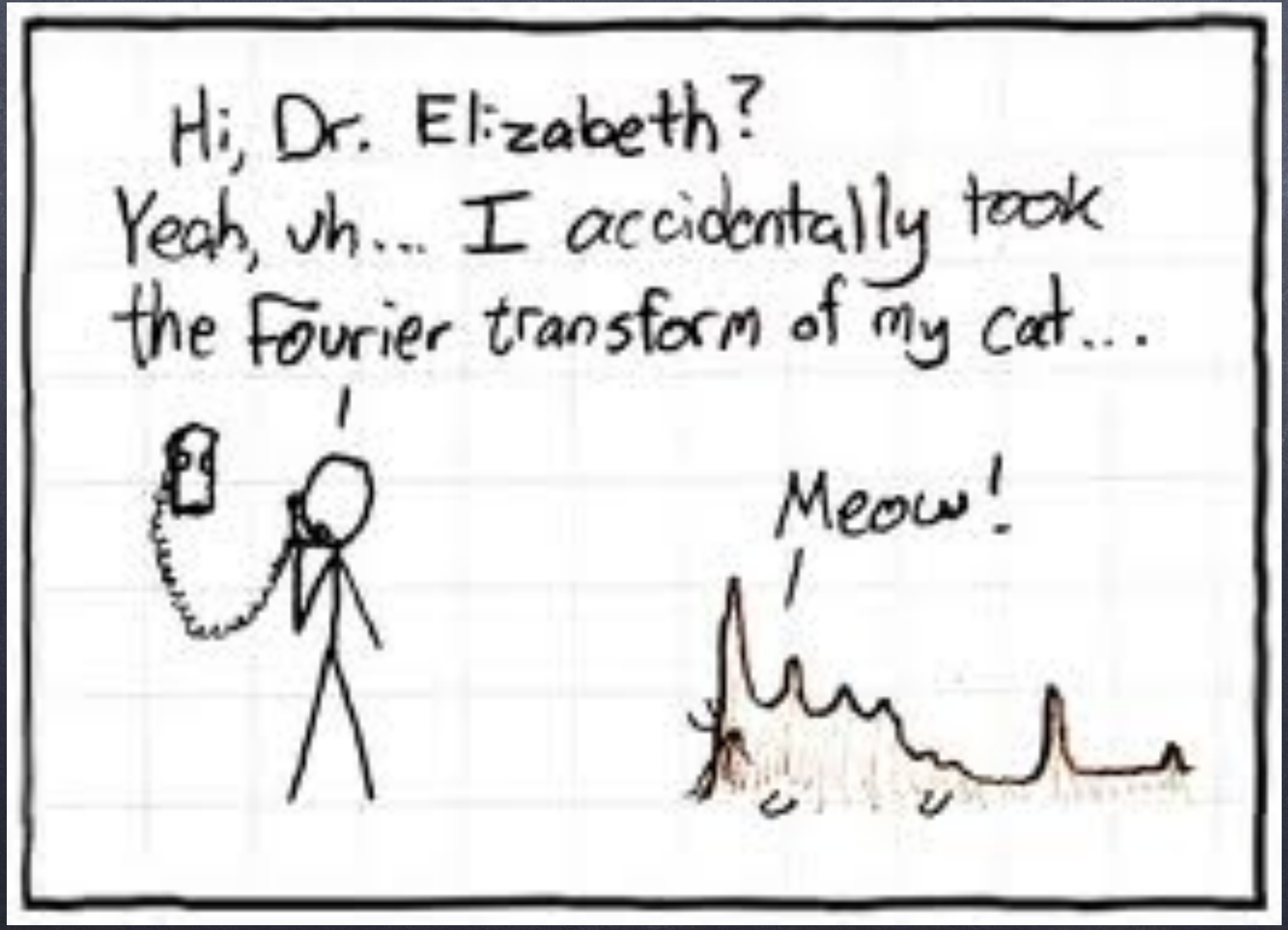
401 coeffs de Fourier

Fourier (FFT) agacements



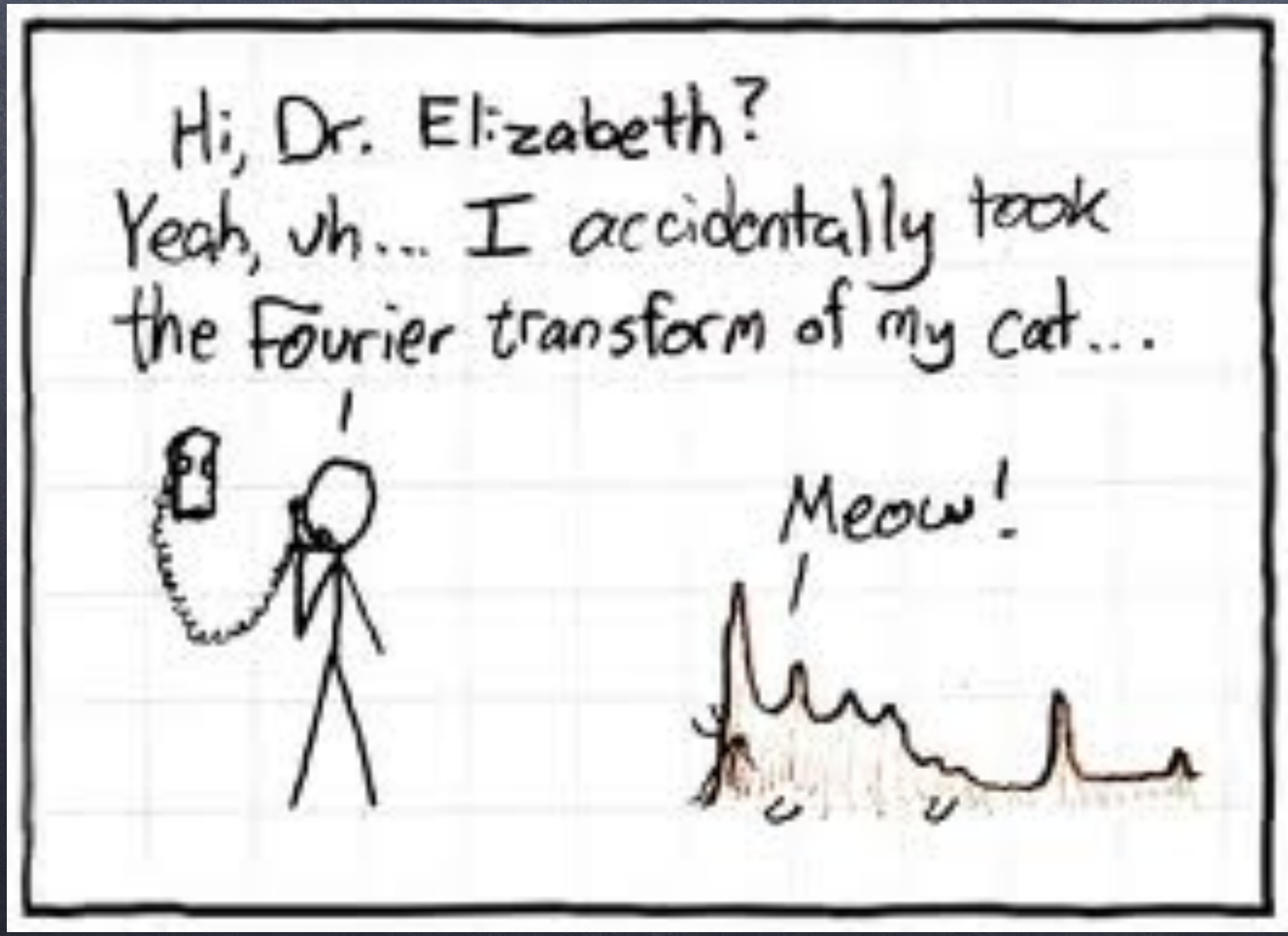
Fourier (FFT) agacements

- Complex!



Fourier (FFT) agacements

- Complex!
  - La plus part du temps nos signaux sont réels



Transformée en cosinus discrets

Transformée en cosinus discrets

Transformée en cosinus discrets

- DCT (discrete cosinus transform)

Transformée en cosinus discrets

- DCT (discrete cosinus transform)
  - Demo08

Transformée en cosinus discrets

- DCT (discrete cosinus transform)
  - Demo08
    - dct - idct

Transformée en cosinus discrets

- DCT (discrete cosinus transform)
  - Demo08
    - dct - idct
    - dct2 - idct2

Limites de Fourier

- L’analyse de Fourier est donc inadaptée aux signaux qui changent brusquement et de manière imprévisible: or, en traitement du signal c’est souvent dans de tels changements que l’information est la plus intéressante

Limites de Fourier

- **Défauts majeurs:**

  1) une information sur un moment du signal est répandue parmi toutes les fréquences de sa transformée

  2) le manque d'information sur le temps (espace) rend une T.F. terriblement sensible aux erreurs

Limites de Fourier

- Si on enregistre un signal d'une heure et que les 5 dernières minutes sont corrompues, cette erreur corrompt toute la T.F.
- Les erreurs de phases sont désastreuses : elles risquent d'engendrer un signal totalement différent du signal initial

Limites de Fourier

"Parce que la FFT est très efficace, elle est employée dans des problèmes auxquelles elle est inapdaptée. On abuse de la FFT de même que les Américains prennent leur voiture pour aller au coin de la rue"

Yves Meyers

Au delà de Fourier

- Problème: Ça ne sera plus linéaire

  "On dit parfois que la grande découverte du XIXe siècle était que les équations de la nature sont linéaires, et la grande découverte du XXe siècle est qu'elles ne le sont pas"

  Körner

À la recherche du temps caché

"Nos expériences quotidiennes - notamment nos sensations auditives - imposent une description en terme de temps **ET** de fréquences"

Gabor (1900-1979)

à la recherche du temps caché

T.F. à fenêtre glissante

$$\mathbf{STFT}\{x(t)\} \equiv X(\tau,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t-\tau)e^{-j\omega t}\,dt$$

T.F. à fenêtre glissante

$$\mathbf{STFT}\left\{x(t)\right\} \equiv X(\tau,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t-\tau)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$\mathbf{STFT}\left\{x[n]\right\} \equiv X(m,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]w[n-m]e^{-j\omega n}$$

T.F. à fenêtre glissante

$$\mathbf{STFT}\{x(t)\} \equiv X(\tau,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t-\tau)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$\mathbf{STFT}\{x[n]\} \equiv X(m,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]w[n-m]e^{-j\omega n}$$

Différentes fonctions de fenêtrage

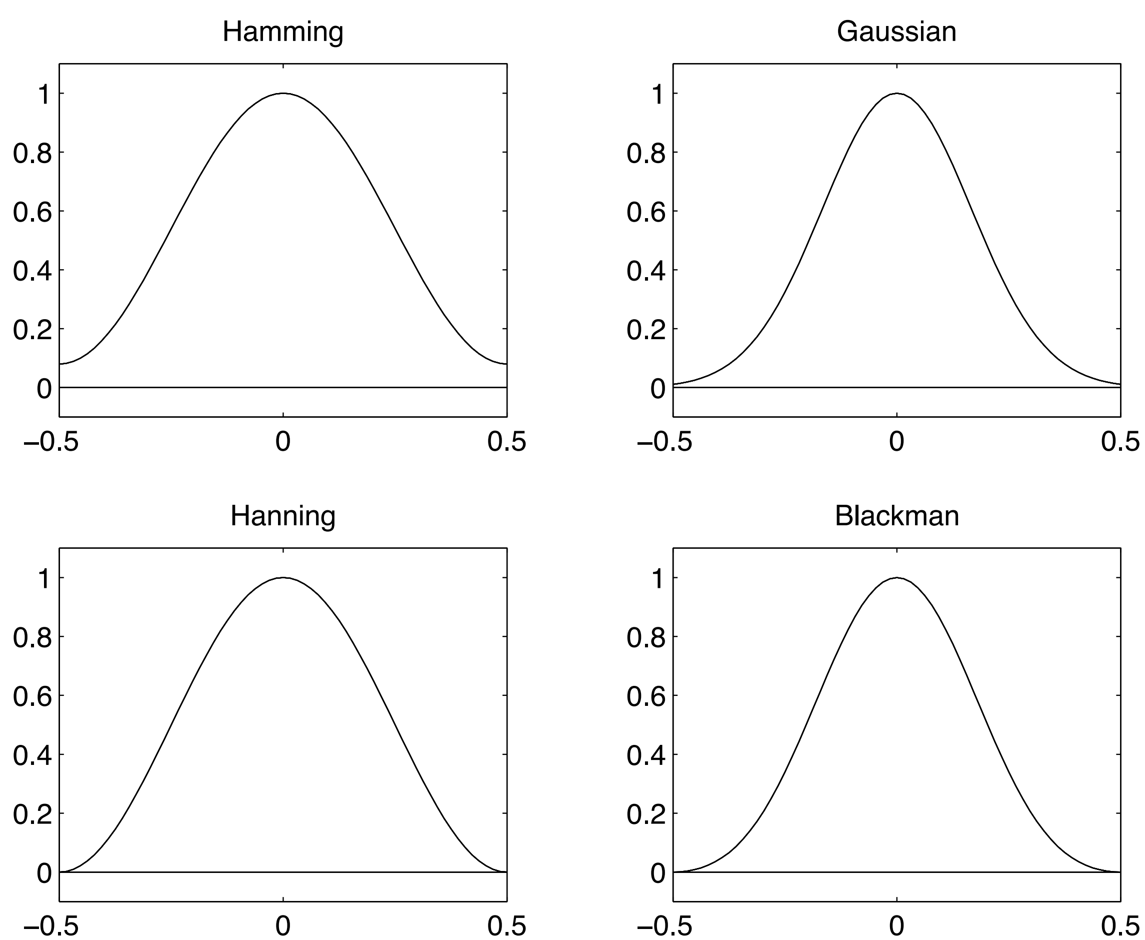
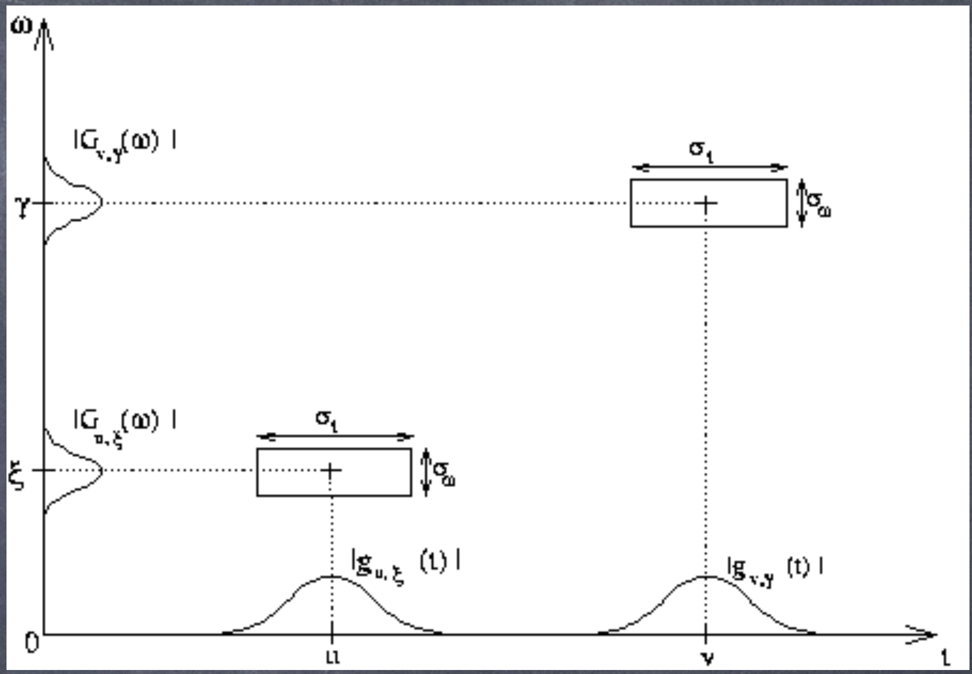


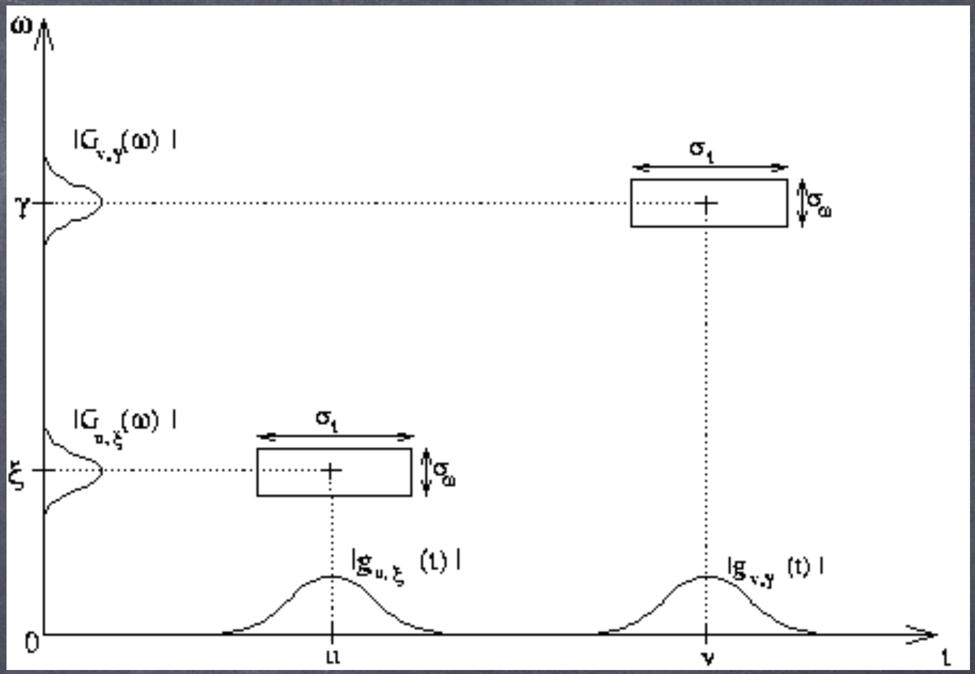
Fig. 4.5. A Wavelet Tour of Signal Processing, 3rd ed. Graphs of four windows g whose support are $[-1/2, 1/2]$.

T.F. à fenêtre glissante



- Problème: la fenêtre est de taille fixe

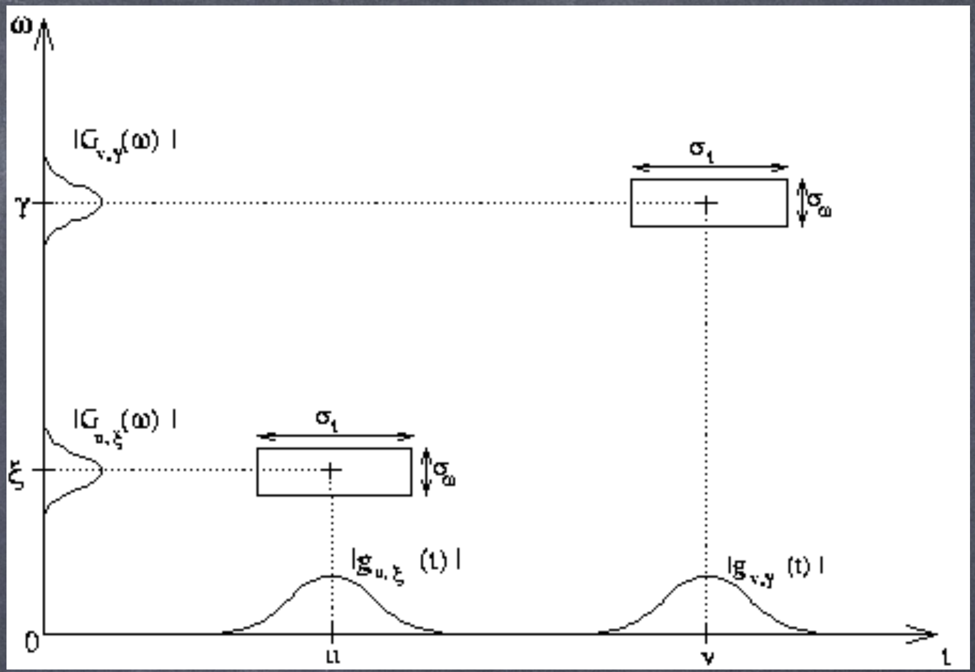
T.F. à fenêtre glissante



- Problème: la fenêtre est de taille fixe
- Compromis:
  Quand la fenêtre est étroite, on localise les changements soudains, mais on est aveugle aux basses fréquences du signal

  Quand la fenêtre est large, on ne peut pas préciser l'instant ou se produit un pic ou discontinuité

T.F. à fenêtre glissante



- Problème: la fenêtre est de taille fixe
- Compromis:
  Quand la fenêtre est étroite, on localise les changements soudains, mais on est aveugle aux basses fréquences du signal

  Quand la fenêtre est large, on ne peut pas préciser l'instant ou se produit un pic ou discontinuité
- Problème: Pas de reconstruction facile (comme en Fourier classique) pour obtenir l'inverse

À la recherche du temps caché

"On a besoin d'une notion d'échelle"

À la recherche du temps caché

"On a besoin d'une notion d'échelle"

À la recherche du temps caché

"On a besoin d'une notion d'échelle"

Multirésolution